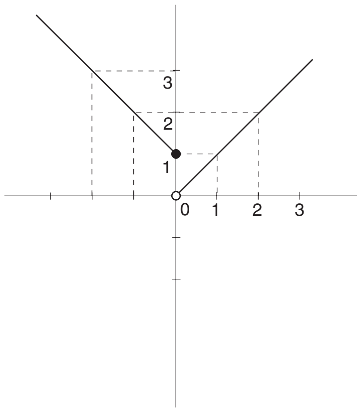
Actividades iniciales

1. Representa gráficamente la siguiente función y estudia su continuidad en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 \text{ si } & x \leq 0 \\ x \text{ si } & x > 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x + 1 = 1 = f(0)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \neq f(0)$

En $x = 0$ la función no es continua.

2. ¿Puedes definir la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ en algún punto de modo que f sea continua en todo R?

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = 1$$

No es continua en $x = 1$, pues no está definida. Evitemos la discontinuidad, definiéndola:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

3. Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } & x \leq 0 \\ 1 - x^2 \text{ si } & 0 < x \leq 1 \\ x \text{ si } & x > 1 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$.

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1$

  $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 - x^2) = 1$

  $f(0) = e^0 = 1$

Luego existe $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, por tanto esta función es continua en $x = 0$.

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0$

  $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1$

  $f(1) = 1 - 1^2 = 0$

Por tanto, $f(x)$ es continua por la izquierda en $x = 1$, pero no lo es por la derecha.
La función $f(x)$ no es continua en $x = 1$.

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - \dfrac{|x|}{x} \text{ si } & x \neq 0 \\ 5 \text{ si } & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } & x \leq 2 \\ x + 1 \text{ si } & x > 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \text{ si } & x <> 3 \; (x \neq 3) \\ 6 \text{ si } & x = 3 \end{cases} \qquad l(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } & x > -1 \\ 3 \text{ si } & x \leq -1 \end{cases}$$

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 5 - \dfrac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} 5 - \dfrac{(-x)}{x} = 6$

  $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 5 - \dfrac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} 5 - \dfrac{x}{x} = 4$

  $f(0) = 5$

  $f(x)$ no es continua ni por la derecha, ni por la izquierda en $x = 0$.

- $\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3 = g(2)$

  $\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 1) = 3 = g(2)$

  $g(x)$ es continua en toda la recta real.

- $\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 3^-} \dfrac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} (x + 3) = 6$

  $\lim_{x \to 3^+} h(x) = \lim_{x \to 3^+} (x + 3) = 6$

  $h(3) = 6$

  $h(x)$ es continua en toda la recta real.

- $\lim_{x \to -1^-} l(x) = \lim_{x \to -1^-} 3 = 3$

  $\lim_{x \to -1^+} l(x) = \lim_{x \to -1^+} (2x - 1) = -3$

  $l(-1) = 3$

  $l(x)$ es continua por la izquierda en $x = -1$, pero no lo es por la derecha. Luego $l(x)$ no es continua en $x = -1$.

2 Calcula K, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo R.

$$f(x) = \begin{cases} sen\,(3x) \text{ si } & x \leq \dfrac{\Pi}{2} \\ 2k + cos\,(2x) \text{ si } & x > \dfrac{\Pi}{2} \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ k \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} 1+|x| \text{ si } x<0 \\ k \text{ si } x=0 \\ \dfrac{3}{2}x+1 \text{ si } x>0 \end{cases}$$

$$l(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+2}{x^2-1} \text{ si } x \neq -1 \\ k \text{ si } x=-1 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}^-} sen\,(3x) = sen\,\dfrac{3\Pi}{2} = -1$

  $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}^+} 2k + cos\,(2x) = 2K + cos\Pi = 2k - 1$

  $f\left(\dfrac{\Pi}{2}\right) = sen\,\dfrac{3\Pi}{2} = -1$

  $f(x)$ es continua en $x = \dfrac{\Pi}{2}$ si $2K - 1 = -1 \Rightarrow K = 0$.

  Para $K = 0 \Rightarrow f(x)$ es continua en todo R.

- $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x-2} = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x-2} = +\infty$

  $g(x)$ no es continua en $x = 2$ para ningún valor de K.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 + |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 - x = 1$

  $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{3}{2}x + 1\right) = 1$

  $h(0) = K$.
  $h(x)$ es continua en $x = 0$ si $K = 1$.
  Para $K = 1$, la función $h(x)$ es continua es todo R.

- $\lim\limits_{x\to -1^-} l(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x+2}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2\,(x+1)}{(x+1)\,(x-1)} =$

  $= \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2}{x-1} = -1$

  $\lim\limits_{x\to -1^+} l(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x+2}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2\,(x+1)}{(x+1)\,(x-1)} =$

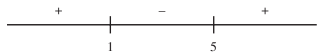
  $= \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2}{x-1} = -1$

  $l(-1) = K$.
  $l(x)$ es continua en $x = -1$ si $K = -1$.
  Para $K = -1$, la función $l(x)$ es continua en todo R.

3 **Estudia la continuidad de la función**
$f(x) = |x^2 - 6x + 5|$

$$f(x) = |x^2 - 6x + 5| = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \text{ si } x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ -(x^2 - 6x + 5) \text{ si } x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $(x^2 - 6x + 5)$. Los ceros de la función son $x = 1$ y $x = 5$.



Luego:
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$ si $x \leq 1$ o $x \geq 5$
$x^2 - 6x + 5 < 0$ si $1 < x < 5$.
Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \text{ si } x \leq 1 \text{ o } x \geq 5 \\ -x^2 + 6x - 5 \text{ si } 1 < x < 5 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y $x = 5$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - 6x + 5) = 0 = f(1)$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-x^2 + 6x - 5) = 0 = f(1)$

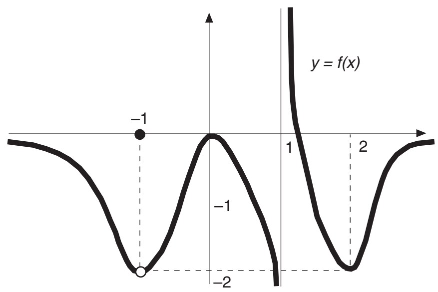
  Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.

- $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (-x^2 + 6x - 5) = 0 = f(5)$

  $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} (x^2 - 6x + 5) = 0 = f(5)$

  Luego $f(x)$ es continua en $x = 5$.
  Por tanto, la función $f(x)$ es continua en toda la recta real.

4 **Estudia la continuidad de la función $y = f(x)$ en los puntos de abscisa $x = -1$; $x = 1$, $x = 2$. Si existiesen puntos de discontinuidad, indica el tipo. Determina el dominio, recorrido, máximos y mínimos absolutos y relativos si los hubiera, y asíntotas.**



- En $x = -1$, la función $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad evitable.
- En $x = 1$, la función $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto infinitivo.
- En $x = 2$, la función $f(x)$ es continua.
- $Dom\, f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- $Im\, f = R$.
- No tiene ni máximo absoluto ni mínimo absoluto.
- Tiene dos mínimos relativos en los puntos $(-1, -2)$ y $(2, -2)$ y un máximo relativo en el punto $(0, 0)$.
- Asíntota vertical: $x = 1$.
  Asíntota horizontal: $y = 0$.

5 **Halla el valor de a para el cual la función f dada por $(ax - 3)$ si $x < 4$ y por $(-x^2 + 10x - 13)$ si $x \geq 4$ es continua.**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 \text{ si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 13 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$$

Esta función $f(x)$ es continua en todos los números reales, excepto en $x = 4$. Veamos qué ocurre en $x = 4$.

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} ax - 3 = 4a - 3$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} -x^2 + 10x - 13 = 11$

$f(4) = 11$

Para que esta función sea continua en $x = 4$ se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$$

Por tanto, $4a - 3 = 11 \Rightarrow \frac{7}{2} = a$

6 Halla el dominio y estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \sqrt{4 + x} + \sqrt{4 - x} - 2\sqrt{2}$$

- $Dom\, f = \{x \in R \mid 4 + x \geq 0 \text{ y } 4 - x \geq 0\}$
  Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4 + x \geq 0 \\ 4 - x \leq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x \geq -4 \\ \Rightarrow \quad x \leq 4 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \text{ Solución } [-4,4]$$

  $Dom\, f = \{x \in R \mid x \in [-4, 4]\} = [-4, 4]$

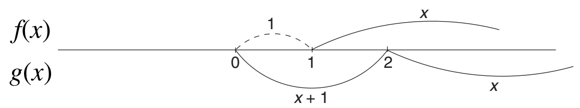
- La función $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio. Es decir es continua $\forall\, x \in [-4, 4]$.

7 Sean las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1) \\ x \text{ si } x \in [1,+\infty) \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \in [0,2) \\ x \text{ si } x \in [2,+\infty) \end{cases}$$

Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f + g$ ***b)*** $f \cdot g$ ***c)*** $\frac{f}{g}$



a)

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ si } x \in [0,1) \\ 2x + 1 \text{ si } x \in [1,2) \\ 2x \text{ si } x \in [2,+\infty) \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} (f + g)(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x + 2 = 2 = f(0)$
  No existe $\lim\limits_{x\to 0^-} (f + g)(x)$, por tanto $(f + g)$ no es continua en $x = 0$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} (f + g)(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x + 2) = 3 = f(1)$
  $\lim\limits_{x\to 1^+} (f + g)(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x + 1) = 3 = f(1)$
  La función $(f + g)$ es continua en $x = 1$.

- $\lim\limits_{x\to 2^-} (f + g)(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x + 1) = 5 \neq f(2)$
  $\lim\limits_{x\to 2^+} (f + g)(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 2x = 4 = f(2)$
  La función $(f + g)$ no es continua en $x = 2$.
  Por tanto la función $(f + g)$ no es continua en $x = 1$ y tampoco es continua en $x = 2$.

b)

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \in [0,1) \\ x(x + 1) \text{ si } x \in [1,2) \\ x^2 \text{ si } x \in [2,+\infty) \end{cases}$$

Los mismo que para la función anterior estudiamos la continuidad en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Y obtenemos que la función $f \cdot g$ no es continua en $x = 0$ y tampoco en $x = 2$.

c)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 1} \text{ si } x \in [0,1) \\ \dfrac{x}{x + 2} \text{ si } x \in [1,2) \\ 1 \text{ si } x \in [2,+\infty) \end{cases}$$

Haciendo lo mismo que en las funciones anteriores obtenemos que la función $\frac{f}{g}$ no es continua en $x = 0$, ni en $x = 1$, ni en $x = 2$.

8 Halla los puntos de discontinuidad de la siguiente función y clasifícalos:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$$

Esta función $f(x)$ tiene dos puntos de discontinuidad en los ceros del denominador $x = 0$ y $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \to +\infty$

En $x = 0$, $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto infinito.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x + 2)}{x} = 2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x + 2)}{x} = 2$

En $x = 2$ $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad evitable.

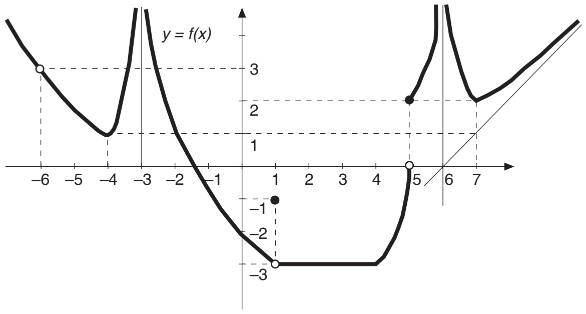
9 Demuestra que la función $f(x) = x^3 - 8x + 2$ corta al eje de abscisas en el intervalo (0, 2). ¿Se puede decir lo mismo de la función $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x - 1}$?

$f(x) = x^3 - 8x + 2$.

$f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y además $f(0) = 2$ y $f(2) = -6$, es decir, signo $f(0) \neq$ signo $f(2)$, por tanto la función $f(x)$ verifica el teorema de Bolzano, luego existe $C \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0 \Rightarrow \exists\, c \in (0, 2)$ tal que $c^3 - 8c + 2 = 0$, es decir corta al eje de abscisas.

No podemos decir lo mismo de la función $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 1}$, puesto que esta función no es continua en $x = 1$; luego no es continua en $[0, 2]$, por lo que no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

10 **En la siguiente función, estudia: los puntos de discontinuidad y clasificación de ellos, dominio, recorrido, extremos absolutos y relativos y asíntotas.**



- En $x = -6$ tiene un punto de discontinuidad evitable. Lo mismo en $x = 1$.
  En $x = -3$ tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto infinito. Lo mismo en $x = 6$. En $x = 5$ tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto finito.
- $Dom\, f = R - \{-6, -3, 6\}$
- $Im\, f = [-3, +\infty)$
- $f(x)$ tiene mínimo absoluto en –3. No tiene máximo absoluto.
- $f(x)$ tiene dos mínimos relativos en los puntos (–4, 1) y (7, 2). No tiene máximo relativo.
- Asíntotas verticales: $x = -3$; $x = 6$.
  Asíntota oblicua: $y = x - 6$.

11 **Halla el valor de a para el cual la función**

$$f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 + 3x + -4}$$

tenga una discontinuidad evitable en $x = 1$.

a debe valer –2, puesto que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+2)}{(x+4)} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+2)}{(x+4)} = \frac{3}{5}$$

Para $a = -2$, $f(x)$ tiene en $x = 1$ un punto de discontinuidad evitable.

12 **Demuestra que existe un número real para el cual la igualdad siguiente es cierta: $3\, sen\, x = e^{-x} \cdot cos\, x$.**

Para demostrar que la igualdad es cierta hay que probar que la función $f(x) = 3\, sen\, x - e^{-x} \cos x$ verifica el teorema de Bolzano.

1.º $f(x)$ es continua en $\left[0, \frac{\Pi}{2}\right]$.

2.º $f(0) = -1 < 0$ y $f\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 3 > 0$, es decir signo $f(0) \neq$ signo $f\left(\frac{\Pi}{2}\right)$

$f(x)$ cumple Bolzano en $\left[0, \frac{\Pi}{2}\right]$, luego $\exists\, c \in \left(0, \frac{\Pi}{2}\right)$, tal que $f(c) = 0$.

13 **Si f es continua en $x = 2$ y $f(2) < 0$. ¿Existe un entorno de 2 en el cual $f(x)$ es negativa?**

Por el teorema de conservación del signo como $f(x)$ es continua en $x = 2$ y $f(2) \neq 0$ existe un entorno de 2 en el cual el signo de $f(x)$ es el mismo que en $f(2)$, en este caso negativo.

14 **Estudia la continuidad de la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} ln\,(-x) \text{ si } x < -2 \\ sen\,(\Pi x) \text{ si } -2 \le x \le 2 \\ 0 \text{ si } 2 < x < 4 \\ x^2 - 12 \text{ si } x \ge 4 \end{cases}$$

Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$.

- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} ln(-x) = ln\, 2 \neq f(-2)$
  $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} sen\,(\Pi x) = sen\,(-2\Pi) = 0 = f(-2)$
  $f(x)$ no se continua en $x = -2$.

- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} sen\,(\Pi x) = sen\, 2\Pi = 0 = f(2)$
  $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 0 = 0 = f(2)$
  $f(x)$ es continua en $x = 2$.

- $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} 0 = 0 \neq f(4)$
  $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} x^2 - 12 = 4 = f(4)$
  $f(x)$ no es continua en $x = 4$.

15 **Si f es continua en [2, 7], siendo $f(2) = -2$ y $f(7) = 4$, ¿podemos afirmar que la función $g(x) = f(x) - 1$ tiene al menos una solución en (2, 7)?**

$g(x) = f(x) - 1$ es continua en [2, 7] por ser diferencia de dos funciones continuas en [2, 7].
Además $g(2) = f(2) - 1 = -2-1 = -3 < 0$ y $g(7) = f(7) - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$ por tanto, signo $g(2) \neq$ signo $g(7)$.
Por todo lo anterior podemos afirmar que $g(x)$ verifica el teorema de Bolzano, es decir, $\exists\, c \in (2, 7)$, tal que $g(c) = 0$, es decir existe al menos una solución de $g(x)$ en (2, 7).

16 **¿Es posible redefinir la función: $f(x) = 2 + x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ para que sea continua en $x = 0$?**

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2 + x \cdot sen\frac{1}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2 + x \cdot sen\frac{1}{x} = 2$$

Redefinimos $f(x) = \begin{cases} 2 + x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Esta función es continua en $x = 0$.

17 **La función $f(x) = tgx$ no tiene máximo absoluto en $[0, \Pi]$, ¿contradice este hecho el teorema de Weierstrass?**

No contradice el teorema de Weierstrass, puesto, que $f(x) = tgx$ no es continua en $x = \frac{\Pi}{2}$; por tanto, no es continua en $[0,\Pi]$. Debido a esto, a $f(x)$ no se le puede aplicar el teorema de Weierstrass.

18 **Halla $\sqrt[5]{37}$ con error menor que una décima. Nota: Aplica el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x^5 - 37$.**

$f(x) = x^5 - 37$ es continua en [2, 2'1]; además $f(2) = 32 - 37 < 0$ y $f(2, 1) = 40{,}8 - 37 > 0$, por tanto $f(x) = x^5 - 37$ verifica el teorema de Bolzano $\Rightarrow \exists\, c \in (2, 2{,}1)$, de modo que $f(c) = 0 \Rightarrow c^5 - 37 = 0 \Rightarrow c = \sqrt[5]{37} \in (2, 2{,}1)$.

19 **Calcula m y b para que la función f sea continua en todo R:**

$$f(x) = \begin{cases} 4\ sen\ x \text{ si } x \le -\dfrac{3\Pi}{2} \\ m\ sen\ x + b \text{ si } -\dfrac{3\Pi}{2} < x < \dfrac{3\Pi}{2} \\ 4\ cos\ x \text{ si } x \ge \dfrac{3\Pi}{2} \end{cases}$$

Estudiemos la continuidad en $x = -\frac{3\Pi}{2}$; $x\ \frac{3\Pi}{2}$

- $\lim\limits_{x \to -\frac{3\Pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{3\Pi}{2}^-} 4\, sen\, x = 4 = f\left(-\frac{3\Pi}{2}\right)$

  $\lim\limits_{x \to -\frac{3\Pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{3\Pi}{2}^+} m\ sen\ x + b = m + b$

  $f(x)$ es continua en $x = -\frac{3\Pi}{2}$ si $m + b = 4$

- $\lim\limits_{x \to \frac{3\Pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{3\Pi}{2}^-} m\ sen\ x + b = -m + b$

  $\lim\limits_{x \to \frac{3\Pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{3\Pi}{2}^+} 4\, cos\, x = 0$

  $f(x)$ es continua en $x = \frac{3\Pi}{2}$ si $-m + b = 0$

  De todo esto deducimos que $f(x)$ es continua en todo R si:

$$\left.\begin{array}{r} -m + b = 0 \\ +m + b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} b = 2 \\ m = 2 \end{array}}$$

20 **Demuestra que la ecuación $\Pi^x = e$ tiene solución en (0, 1). ¿Lo cumple también la ecuación $Ø^x = e$ siendo Ø el número de oro?**

- Para ver si la ecuación $\Pi^x = e$ tiene soluciones en (0, 1), veamos si $f(x) = \Pi^x - e$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en [0, 1].
  $f(x)$ es continua en [0, 1].

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = \Pi^0 - e = 1 - e < 0 \\ f(1) = \Pi^1 - e = \Pi - e > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{signo } f(0) \ne \text{signo } f(1)$$

Por tanto, $f(x)$ verifica Bolzano $\Rightarrow \exists\, c \in (0, 1)$, tal que $f(c) = = 0 \Rightarrow \exists\, c \in (0, 1)$ tal que $\Pi^c = e$.

- Para la ecuación $\Phi^x = e$ hacemos el mismo estudio:
  $f(x) = \Phi^x - e$ es continua en [0, 1]
  $f(0) = \Phi^0 - e = 1 - e < 0$
  $f(1) = \Phi^1 - e = \Phi - e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - e < 0$

Como signo $f(0)$ = signo $f(1)$ no se puede explicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \Phi^x - e$, por lo que no podemos asegurar que existe una solución de la ecuación $\Phi^x = e$ en (0, 1).

21 **La función $f(x) = cotg\ x$ tiene distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{3\Pi}{4}, \frac{5\Pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?**

A la función $f(x) = cotg\ x$ no se le puede aplicar el teorema de Bolzano, puesto que no es continua en $x = \Pi \in \left[\frac{3\Pi}{4}, \frac{5\Pi}{4}\right]$, luego $f(x)$ no es continua en $\left[\frac{3\Pi}{4}, \frac{5\Pi}{4}\right]$. Así que le falla una de las hipótesis de este teorema.

22 **Si f y g son dos funciones discontinuas en $x = a$, ¿son también discontinuas en $x = a$ las siguientes funciones?**

a) $f + g$ ***b)*** $f \cdot g$ ***c)*** $\frac{f}{g}$

En general no tienen porque ser discontinuas.
Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{2\,|x|}{x} = \begin{cases} 2 \text{ si } x \ge 0 \\ -2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{-2\,|x|}{x} = \begin{cases} -2 \text{ si } x \ge 0 \\ 2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Estas funciones son discontinuas en $x = 0$.
Sin embargo:

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \ge 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) + g(x) \text{ es continua en } x = 0$$

$$f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} -4 \text{ si } x \ge 0 \\ -4 \text{ si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \text{ es continua en } x = 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -1 \text{ si } x \ge 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = -1 \text{ y es continua en } x = 0$$

Por tanto, como hemos encontrado un contraejemplo, en general dos funciones pueden ser discontinuas en un punto y su suma, producto y cociente ser funciones continuas en ese punto.

23 **Demuestra que cualquier polinomio cuyos términos sean todos de grado impar tiene al menos una raíz.**

Sea $f(x) = a_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + a_{2n-1}\, x^{2n-1} + \ldots + a_1\, x$

Un polinomio con todos los términos de grado impar.
$f(x)$ es continua en toda la recta real y como:

$$\lim_{x \to -\infty} a_{2n+1}\, x^{2n+1} + \ldots + a_1 x \to -\infty < 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} a_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + \ldots + a_1 x \to +\infty > 0$$

Es posible encontrar un intervalo de modo que el signo en los extremos sea distinto. Por todo ello $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano, por lo que tiene solución.
Es decir si $f(a) < 0 \Rightarrow f(-a) > 0$
$\Rightarrow$ se cumple Bolzano en $[-a, a]$
$\Rightarrow \exists\, c \in (-a, a)$, tal que $f(c) = 0$
$\Rightarrow f(x)$ tiene una raíz en $(-a, a)$

24 **¿Es continua la función $f(x) = \dfrac{4}{x}$ en el intervalo cerrado [0, 3]? ¿Y en el intervalo [1, 3]? ¿Está acotada en estos intervalos?**

La función $f(x) = \dfrac{4}{x}$ no es continua en [0, 3], puesto que no es continua en $x = 0$. La función $f(x) = \dfrac{4}{x}$ sí es continua en [1, 3], por lo que podemos asegurar, por el teorema de la acotación en un intervalo cerrado, que $f(x)$ está acotada en [1, 3].

25 **Sea f una función que cumple $f(-2) \le 0$, $f(0) > 0$. ¿Es siempre cierto que $\exists\, c \in (-2, 0)$ tal que $f(c) = 0$?**

Para que sea cierto que $\exists\, c \in (-2, 0)$ tal que $f(c) = 0$, la función $f(x)$ debe verificar el teorema de Bolzano que es el que nos garantiza que exista esta solución. La función dada no verifica las hipótesis del teorema de Bolzano, pues no podemos decir nada acerca de su continuidad en $[-2, 0]$.

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

26 **Demuestra que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } -1 \le x \le 0 \\ -x \text{ si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 0$, ¿qué tipo de discontinuidad presenta en los puntos de abscisa $x = -1$; $x = 0$ y $x = 1$?

- $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 1) = 1 = f(0)$.
  $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 \ne f(0)$.
  En $x = 0$, la función $f(x)$ es continua por la izquierda pero no por la derecha, por lo que en $x = 0$ la función $f(x)$ es discontinua.
- En $x = 0$, $f(x)$ presenta una discontinuidad no evitable de salto finito.
- En $x = -1$ y en $x = 1$, la función $f(x)$ presenta una discontinuidad no evitable esencial, pues no existe el límite a izquierda en $x = -1$ ni a derecha de $x = 1$.

27 **La función $f(x) = \dfrac{x^2 - a}{x^3 + x^2 + ax + 12}$ presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$, ¿para qué valor de a?**

Para $a = 4$, puesto que:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4x + 12} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2 - x + 6)} = \lim_{x \to -2^-} \frac{(x-2)}{x^2 - x + 6} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4x + 12} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2 - x + 6)} = \lim_{x \to -2^+} \frac{(x-2)}{x^2 - x + 6} = -\frac{1}{3}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$ para $a = 4$.

28 **Estudia el dominio y la continuidad de la función:**

$$f(x) = ln \left[\frac{x + 2}{x^2}\right]$$

- $Dom\, f = \left\{x \in R \;\middle|\; \dfrac{x + 2}{x^2} > 0 \text{ y } x \ne 0\right\}$
  Por tanto, $Dom\, f = (-2, 0) \cup (2, +\infty)$
- $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio.

29 **Demuestra que si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y existe un número real K que satisfaga $K > f(b)$ y $K < f(a)$. Entonces debe existir un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = K$.**

Veamos si la función $g(x) = f(x) - K$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en $[a, b]$.
- $g(x)$ es continua en $[a, b]$ por ser diferencia de dos funciones continuas en $[a, b]$
- $\left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) - k > 0 \text{ pues } k < f(a) \\ g(b) = f(b) - k < 0 \text{ pues } k > f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{signo } g(a) \ne g(b)$

Por tanto, $g(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en $[a, b]$.
Luego podemos afirmar que $\exists\, c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(c) - K = 0 \Rightarrow f(c) = K$

30 **La función f se define en [–1, 1] del siguiente modo: vale –1 si $x \le 0$ y vale $2x^3 - 1$ si $x \ge 0$. Explica si f verifica el teorema de Bolzano.**

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \le 0 & \text{en } [-1, 1] \\ 2x^3 - 1 \text{ si } x \ge 0 \end{cases}$$

Veamos si $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en [–1, 1]. Para ello se debe verificar:
1.º $f(x)$ debe ser continua en [–1, 1]. Estudiemos la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$ que es el único punto en el cual puede presentar problemas.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-1) = f(0).$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x^3 - 1) = -1 = f(0)$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ la función es continua en $x = 0 \Rightarrow f(x)$ es continua en $[-1, 1]$.

2.º $f(-1) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$ luego signo $f(-1) \neq$ signo $f(1)$
Por lo tanto, $f(x)$ verifica el teorema de Bolzano en $[-1, 1]$.

31 Si *g* es una función polinómica, ¿qué se puede afirmar sobre la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^3 - x}$?

$f(x)$ es discontinua en todos los ceros del denominador. En $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$. En estos puntos la discontinuidad de $f(x)$ será evitable si estos valores anulan el numerador y será no evitable en aquellos que anulan $g(x)$. Es decir, si $g(0) = 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad evitable, en caso contrario sería no evitable. Con $x = 1$ y $x = -1$ se haría igual.

32 Halla *a* y *b* para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la función *f* y halla el punto $c \in (-\Pi, \Pi)$ al que hace mención el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ si } -\Pi \le x \le 0 \\ a + x^2 \text{ si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x} \text{ si } 1 \le x \le \Pi \end{cases}$$

1.º Estudiemos la continuidad de $f(x)$ en $[-\Pi, \Pi]$.

- $\lim\limits_{x\to -\Pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\Pi^+} \cos x = \cos(-\Pi) = -1 = f(\Pi).$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos x = 1 = f(0)$

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} a + x^2 = a$

  $f(x)$ es continua en $x = 0$ si $a = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} a + x^2 = a + 1$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{b}{x} = \dfrac{b}{1} = b = f(1)$

  $f(x)$ es continua en $x = 1$ si $a + 1 = b$
- $\lim\limits_{x\to \Pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \Pi^-} \dfrac{b}{x} = \dfrac{b}{\Pi} = f(\Pi)$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $[-\Pi, \Pi]$, pues:
- $f(x)$ es continua por la derecha en $x = -\Pi$
- $f(x)$ es continua por la izquierda en $x = \Pi$
- $f(x)$ es continua en $(-\Pi, \Pi)$ si $a = 1$ y $a+1 = b \Rightarrow \boxed{a=1;\, b=2}$

2.º $f(-\Pi) = -1 < 0$ y $f(\Pi) = \dfrac{2}{\Pi} > 0$, por tanto signo $f(-\Pi) \neq$ signo $f(\Pi)$
La función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano para $a = 1$; $b = 2$.

33 Dadas las funciones *f* y *g* definidas en *R* por

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \qquad g(x) = \begin{cases} x \text{ si } x < 0 \\ x^2 \text{ si } x \ge 0 \end{cases}$$

estudia la continuidad de la función $g \circ f$.

Vamos a definir primeramente la función $(g \circ f)(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + x}{2} \text{ si } x \ge 0 \\ \dfrac{x - x}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x \text{ si } x \ge 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \ge 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de $g \circ f$ en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0 = f(0).$

$\lim\limits_{x\to 0^+} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 = f(0).$

$g \circ f$ es continua en toda la recta real.

34 Demuestra que cualquier función polinómica de tercer grado tiene siempre una raíz real. ¿Qué podemos afirmar de funciones polinómicas de cuarto grado?

- La función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano, puesto que:

1.º $f(x)$ es continua en toda la recta real

2.º $\lim\limits_{x\to +\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d \to \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d \to \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Es deci,r siempre es posible encontrar un intervalo en el que se verifique que el signo en los extremos es distinto. Luego podemos encontrar un intervalo en el que la función verifique las hipótesis del teorema de Bolzano y aplicando este teorema en ese intervalo existe un valor en el cual la función polinómica se anula, es decir, existe una raíz real.
De una función polinómica de cuarto grado no podemos afirmar que verifique Bolzano, por lo cual no podemos afirmar nada de que exista una raíz real.