| Nombre: | | | Nota |
|---|---|---|---|
| Curso: | 2º Bachillerato | Examen VII | |
| Fecha: | *12 de Febrero de 2016* | La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota. | |

**1.-** Un segmento de longitud de 5 cm. apoya sus extremos en los semiejes positivos OX y OY, de tal manera que forma con éstos un triángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.

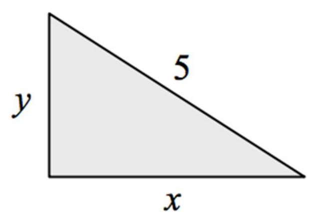
**2.-** Calcula las siguientes integrales:

$$a)\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad\qquad b)\ \int \frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-2x^3-4x^2+8x}\,dx$$

**3.-** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, comprueba que $A^2 = 2\cdot A - I$, siendo I la matriz identidad. Usando la fórmula anterior, calcula $A^4$.

**4.-** Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa *x=0* y que su gráfica tiene en un punto de inflexión en el punto de abscisa *x=-1*. Conociendo además que $\int_0^1 f(x)dx = 6$, halla *a*, *b* y *c*.

**_1.- Un segmento de longitud de 5 cm. apoya sus extremos en los semiejes positivos OX y OY, de tal manera que forma con éstos un triángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido._**




La función a optimizar es el área: $A(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{2}$ con x,y>0

La condición que relaciona las dos variables, es el teorema de Pitágoras: $x^2+y^2=5^2$

Despejando y: $y=\sqrt{25-x^2}$

Y sustituyendo en A, tenemos:

$$A(x)=\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$$

Si la derivamos, obtenemos:

$$A'(x)=\frac{\sqrt{25-x^2}+x\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}}{2}=\frac{\dfrac{25-x^2-x^2}{\sqrt{25-x^2}}}{2}=\frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$$

Igualando a cero:

$$A'(x)=0 \quad\leftrightarrow\quad \frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}=0 \quad\leftrightarrow\quad 25-2x^2=0 \quad\leftrightarrow\quad x=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Descartando la solución negativa por razones obvias (no pertenece al dominio):

$$x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Y por tanto y:

$$y=\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{25-\frac{25}{2}}=\sqrt{\frac{25}{2}}=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Volviendo a descartar la solución negativa.

Por tanto se trata de un triángulo rectángulo isósceles de lado $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Queda por demostrar ***si es un máximo***; para ello derivamos y nos fijamos en el signo de la segunda derivada en dicho punto. *Si es positiva será un mínimo y si es negativa será un máximo.*

$$A'(x)=\frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$$

$$A''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-4x\cdot\sqrt{25-x^2}\right)-\left(25-2x^2\right)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}}{\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{-4x\left(25-x^2\right)+25x-2x^3}{\left(25-x^2\right)\sqrt{25-x^2}}=\frac{x\left(2x^2-75\right)}{2\left(25-x^2\right)\sqrt{25-x^2}}$$

$$A''\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)=-2<0$$ Por tanto es un ***máximo***.

***Es importante remarcar unas cosillas, la primera es que tenemos que calcular el valor en el extremo, no basta con decir "queda demostrado" y la segunda, para aquellos que demostréis que es máximo utilizando la primera derivada y la tabla. En la tabla (recta real normalmente) se representan los puntos del dominio, es decir, en la tabla se pinta el dominio, y marcamos los puntos donde se anula la derivada (posibles extremos) y los puntos que no son del dominio (Asíntotas verticales).***
***En nuestro caso, se trata de un área cuyo dominio es [0,5], como ya se ha indicado con anterioridad, Así que hay que tener mucho cuidado de no salirse del dominio. Podrían penalizarnos.***

## *2.- Calcula las siguientes integrales:*

$$a)\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{(\ln x)^2}{2}=\tfrac{1}{2}\ln^2 x+K$$

$$b)\int\frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-2x^3-4x^2+8x}dx=\int\frac{x\cancel{(x-2)^2}}{\cancel{x\cdot(x-2)^2}\cdot(x+2)}dx=\int\frac{dx}{x+2}=\ln|x+2|+K$$

En esta integral vemos que si simplificamos no necesitamos utilizar el método de Hermite y queda prácticamente inmediata.

***Si alguno de vosotros decide de hacerla descomponiendo y aplicando el método de Hermite, calculando A, B, C y D, que sepa que el resultado es el mismo porque llegará a: A=B=C=0 y D=1 y la integral resultante es igual a la conseguida simplificando.***

## *3.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}$, comprueba que $A^2=2\cdot A-I$, siendo I la matriz identidad. Usando la fórmula anterior, calcula $A^4$.*

Calculamos $A^2$:

$$A^2=\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{pmatrix}$$

Y 2A-1:

$$2A-I=\begin{pmatrix}10&-8&4\\4&-2&2\\-8&8&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{pmatrix}$$

Como podemos comprobar, ambas son iguales.

Como dice el enunciado, si utilizando $A^2=2A-I$, calculamos $A^4$:

$$A^4 = \left(A^2\right)^2 = (2A-I)^2 = 4A^2 - 4AI + I^2 = 4(2A-I) - 4AI + I^2 = 8A - 4I - 4AI + I = 4A - 3I$$

Por tanto:

$$A^4 = 4A - 3I = 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

***Siempre que nos pidan el cálculo de la potencia de una matriz, y nos den una especie de fórmula "de recurrencia", estamos obligados a calcular la potencia de dicha matriz, utilizando la fórmula dada. Sobre todo si nos lo piden explícitamente como es el caso.***

***4.- Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x=0 y que su gráfica tiene en un punto de inflexión en el punto de abscisa x=-1. Conociendo además que $\int_0^1 f(x)dx = 6$, halla a, b y c.***

Si calculamos la primera y la segunde derivada:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \qquad\qquad f''(x) = 6x + 2a$$

Y vamos aplicando las condiciones del problema:

- Extremo en x=0 $\to f'(0)=0 \quad \to \quad b=0$
- Punto de inflexión en x=-1 $\to f'(-1)=0 \quad \to \quad -6+2a=0 \quad \to \quad a=3$
- $\int_0^1 f(x)dx = 6 \quad \to \quad \int_0^1 (x^3+3x^2+c)dx = 6 \quad \to \quad \left[\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}+cx\right]_0^1 = 6$

$$\frac{1}{4}+1+c=6 \quad \leftrightarrow \quad c=\frac{19}{4}$$

Por tanto: **a=3; b=0 y c=19/4**