Nombre:		
Curso:	2º Bachillerato	Examen I
Fecha:	*1 de Octubre de 2014*	***Atención:*** La no explicación de cada ejercicio implica una penalización del 25% de la nota.

1.- Al hacer un recorrido continuo por una carretera con una pendiente muy pronunciada, un ciclista lleva una velocidad de 8 km/h cuando pasa por el kilómetro 125 y de 6 km/h cuando pasa por el kilómetro 124.

a) ¿Existe algún punto entre los dos kilómetros en el que el ciclista fuese a una velocidad de 7 km/h? (1 punto)

b) ¿Puede asegurarse que no ha habido ningún momento entre los dos puntos donde el ciclista haya llevado una velocidad de 20 km/h? (1 punto)

2.- Calcular los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} x+b & si \;\; x\le 1 \\ e^{x-1}+ax & si \;\; 1<x<3 \\ x^2-2x-2 & si \;\; x\ge 3 \end{cases}$ sea continua en todo el conjunto de los números reales. (2 puntos)

3.- Calcula los siguientes límites: (3 puntos)

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+2x\right)^2-14\left(x^2+2x\right)-15}{x^4-29x^2+100} \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+1\right)^4-\left(x-1\right)^4}{\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2-1\right)^2} \qquad c)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$$

4.- Calcula la derivada de las siguientes funciones: (3 puntos)

$$f(x)=\sqrt{\left(1+sen^2x\right)^3} \qquad g(x)=\log_3\left(x^2senx+x\right) \qquad h(x)=\arctan\left(\frac{x}{5}\right)$$

Solución del Examen 1

1.- *Al hacer un recorrido continuo por una carretera con una pendiente muy pronunciada, un ciclista lleva una velocidad de 8 km/h cuando pasa por el kilómetro 125 y de 6 km/h cuando pasa por el kilómetro 124.*

a) *¿Existe algún punto entre los dos kilómetros en el que el ciclista fuese a una velocidad de 7 km/h? (1 punto)*

b) *¿Puede asegurarse que no ha habido ningún momento entre los dos puntos donde el ciclista haya llevado una velocidad de 20 km/h? (1 punto)*

a) Si el recorrido es continuo, es como si habláramos de una función continua. Si en el kilómetro 126 lleva una velocidad de 8 km/h y en el kilómetro 125 lleva una velocidad de 6 km/h, es como si estuvieran hablando de un intervalo, en concreto el intervalo [126,125], cerrado, por supuesto, porque el ciclista ha pasado por dichos puntos.

Así que tenemos una función continua, definida en un intervalo cerrado y acotado, que cuando x=125 vale f(x)=8 y cuando x=124, f(x)=124. Por tanto, como es continua, según el Teorema de los valores intermedios, o Teorema de Darboux, tiene que existir un punto, ***c***, dentro del intervalo (125,124) en el que ocurra f(c)=7.

Por tanto podemos decir sin ánimo de dudas que sí existe un punto (como mínimo) entre los kilómetros 125 y 125 en el que el ciclista circulaba a 7 Km/h.

b) En cuanto a si puede asegurarse que el ciclista no alcanza la velocidad de 20 km/m en dicho intervalo, ***no podemos afirmar nada***, porque no tenemos información suficiente para ello. Puede que el ciclista en cuestión la alcance o puede que no. Lo que sí podemos decir es que, gracias al Teorema de Weiertrass, entre los kilómetros 125 y 124 el ciclista alcanza el máximo y el mínimo absolutos de la velocidad.

2.- *Calcular los valores de a y b para que la función* $f(x)=\begin{cases} x+b & si\ \ x\le 1 \\ e^{x-1}+ax & si\ \ 1<x<3 \\ x^2-2x-2 & si\ \ x\ge 3 \end{cases}$ ***sea continua en todo el conjunto de los números reales. (2 puntos)***

La función en cuestión es una función a trozos, compuesta por tres ramas. La primera rama, por ser polinómica es contínua, la segunda por ser exponencial también lo es, y la tercera, por ser polinómica también es continua.

Por tanto, tenemos una función que es contínua en todos los puntos de su dominio, excepto en los puntos x=1 y x=3 en que la función cambia de rama y que estudiaremos a continuación:

Sabemos que una función es continua en un punto, x_o, si ocurren estas tres cosas:

a) Existe el valor de la función en un punto, $\exists f(x_o)$

b) Existe el límite de la función cuando x tiende al punto x_o, $\exists \lim\limits_{x\to x_o} f(x)$

c) Y además, ambos coinciden, $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$

En X=1:

Existe f(1)=1+b

Veamos que pasa con los límites laterales: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x+b=1+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{x-1}+ax=1+a \end{cases}$ vemos que ambos límites no son iguales, pero como la función tiene que ser continua, entonces son iguales: $1+b=1+a \quad \Rightarrow \quad a=b$

Así que con esto, ya se cumple que el limite coincide con el valor de la función en el punto x=1.

Solución del Examen 1

En X=3:

Existe f(3)=1

Veamos que pasa con los límites laterales: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} e^{x-1} + ax = e^2 + 3a \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} x^2 - 2x - 2 = 1 \end{cases}$ vemos que ambos límites no son iguales, pero como la función tiene que ser continua, entonces tienen que ser iguales: $e^2 + 3a = 1$

Así que con esto, ya se cumple que el limite coincide con el valor de la función en el punto x=1.

Para que f sea continua tienen que ocurrir dos cosas: $\begin{cases} a = b \\ e^2 + 3a = 1 \end{cases}$ por tanto: $\boxed{a = b = \dfrac{1-e^2}{3}}$

3.- Calcula los siguientes límites: (3 puntos)

$$a)\ \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+2x)^2 - 14(x^2+2x) - 15}{x^4 - 29x^2 + 100} = \frac{-63}{0} = \pm\infty$$ no existe, limites laterales distintos.

$$b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^4 - (x-1)^4}{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{8(x^2+1)}{4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x^2+1)}{x} = +\infty$$

$$c)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}} = 1^\infty \left[\text{utilizando la regla del zapato}\right] = e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}-1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}-1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-1\right)}$$

Calculamos a parte; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - 1\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}\cdot(x+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x+1)} = \dfrac{2}{2} = 1$. Por tanto, $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}} = e^1 = e$

4.- Calcula la derivada de las siguientes funciones: (3 puntos)

$$f(x) = \sqrt{\left(1 + sen^2 x\right)^3} \quad \to \quad f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\left(1 + sen^2 x\right)}\cdot sen(2x)$$

$$g(x) = \log_3\left(x^2 senx + x\right) \quad \to \quad g'(x) = \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{x^2\cos x + 2x\sin x + 1}{x^2\sin x + x}$$

$$h(x) = \arctan\left(\frac{x}{5}\right) \quad \to \quad h'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{5}{x^2+25}$$