Nombre:			Nota
Curso:	2º Bachillerato	Examen X (Rec 2º Eval)	
Fecha:	*24 de Marzo de 2016*	La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota.	

OPCIÓN A

1.- a) **(1,5 puntos)** Hallar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & a^2+a+1 & a \\ -1 & a-4 & a-2 \end{pmatrix}$ según sea el valor del parámetro a.

b) **(1 punto)** Indicar cuando existe la matriz inversa y calcularla para a=0.

2.- **(2,5 puntos)** Calcular, razonadamente, el valor de a para que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+5}{4x^2+3}\right)^{ax^2}=\lim_{x\to 0}\left(\cos x+senx\right)^{\frac{\cos x}{senx}}$$

3.- **(0,5 puntos)** Esboza el recinto formado por las curvas:

$$f(x)=e^x \qquad g(x)=e^{-x} \qquad y=2$$

(2 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

4.- Se dice que una matriz A cuadrada de orden 3 es ortogonal si su inversa A^{-1} coincide con su traspuesta A^t. Dado un número real x, sea la matriz B:

$$B=\begin{pmatrix} \cos x & senx & 0 \\ -senx & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) **(1,25 puntos)** Es ortogonal la matriz B?
b) **(1,25 puntos)** ¿Es B^2 ortogonal?

Nombre:			Nota
Curso:	2º Bachillerato	Examen X (Rec 2º Eval)	
Fecha:	*24 de Marzo de 2016*	La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota.	

OPCIÓN B

1.- Dada la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.
b) **(1 punto)** Calcular la matriz inversa de A para $a=2$.
c) **(0,5 puntos)** ¿Existe algún valor de a para el que el rango de la matriz A sea 1?.

2.- Se considera la función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad -1\le x\le 0 \\ \dfrac{c}{x^2+1} & si \quad 0<x\le 1 \end{cases}$$

a) **(0,5 puntos)** Halla el valor de c, sabiendo que *f* es continua.

b) **(1 puntos)** ¿es *f* derivable en el punto de abscisa x=0?

c) **(1 punto)** Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

3.- (2,5 puntos) Calcular el valor de *a* para que la recta $y=2x+6$ sea una asíntota oblicua de la función:

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x-a}$$

4.- (2,5 puntos) Sea $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2$. Calcula el punto de la gráfica de f más próximo al punto *P(18,0)* y calcula también el más alejado.

OPCIÓN A

1.- ***a) (1,5 puntos) Hallar el rango de la matriz*** $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & a^2+a+1 & a\\ -1 & a-4 & a-2\end{pmatrix}$ ***según sea el valor del parámetro a.***

b) (1 punto) Indicar cuando existe la matriz inversa y calcularla para a=0.

a) Para hallar el rango de la matriz, lo primero es calcular su determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & a^2+a+1 & a\\ -1 & a-4 & a-2\end{vmatrix}\underset{F_3+F_1}{\overset{F_2-F_1}{=}}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & a^2+a-2 & a-1\\ 0 & a-1 & a-1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}a^2+a-2 & a-1\\ a-1 & a-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(a+2)\cdot(a-1) & a-1\\ a-1 & a-1\end{vmatrix}=$$

$$=(a-1)^2\begin{vmatrix}a+2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(a-1)^2\cdot(a+2-1)=(a-1)^2\cdot(a+1)$$

El determinante es cero si y solo si $(a-1)^2\cdot(a+1)=0 \quad\leftrightarrow\quad \begin{cases}a=1\\ a=-1\end{cases}$

Si a=1, la matriz A es de la forma: $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & -3 & -1\end{pmatrix}$ cuyo rango como podemos ver es 1 porque las tres filas son iguales o proporcionales.

Si a=-2, la matriz A será: $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -5 & -3\end{pmatrix}$ cuyo rango es dos porque las fila 3 es combinación lineal de las dos primeras ($F_3=F_2-2F_1$).

En resumen: $Rang(A)=\begin{cases}3 \text{ si a} \neq 1 \text{ y a} \neq -1\\ 2 \text{ si a=-1}\\ 1 \text{ si a=1}\end{cases}$

b) La matriz inversa de A, A^{-1}, existe siempre y cuando a sea distinto de uno y de menos 1. Así que para a=0 existe.

Si a=0, la matriz queda de la forma: $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & -4 & -2\end{pmatrix}$, y su determinante lo calculamos sustituyendo el cero en $|A|=(a-1)^2\cdot(a+1)$, por tanto: $|A|=(0-1)^2\cdot(0+1)=1$

Sabemos que la matriz inversa de A viene dada por la expresión: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t)$, por tanto, calculamos la traspuesta; $A^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ y después la adjunta de la transpuesta: $Adj\left(A^t\right)=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$ y por tanto:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

2.- Calcular, razonadamente, el valor de a para que: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+5}{4x^2+3}\right)^{ax^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+senx\right)^{\frac{\cos x}{senx}}$

Lo primero es calcular el límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+senx\right)^{\frac{\cos x}{senx}}=1^\infty$ así que para resolverlo, utilizamos la *regla del zapato*.

$$\boxed{Si \quad \lim_{x\to 0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=1^\infty \quad \to \quad \lim_{x\to 0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x+senx\right)^{\frac{\cos x}{senx}}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+senx-1\right)\cdot\frac{\cos x}{senx}}$$

Estudiamos a parte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+senx-1}{\dfrac{senx}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+senx-1}{\tan x}=\dfrac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-senx+\cos x}{1+\tan^2 x}=1$

Por tanto: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+senx\right)^{\frac{\cos x}{senx}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+senx-1\right)\cdot\frac{\cos x}{senx}}=e^0=1$

Por otro lado, calculamos $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+5}{4x^2+3}\right)^{ax^2}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+5}{4x^2+3}-1\right)\cdot ax^2}$

Utilizando de nuevo la regla del zapato y separando:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+5}{4x^2+3}-1\right)\cdot ax^2=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+5-4x-3}{4x^2+3}\right)\cdot ax^2=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{4x^2+3}\right)\cdot ax^2=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2ax^2}{4x^2+3}\right)=\frac{a}{2}$$

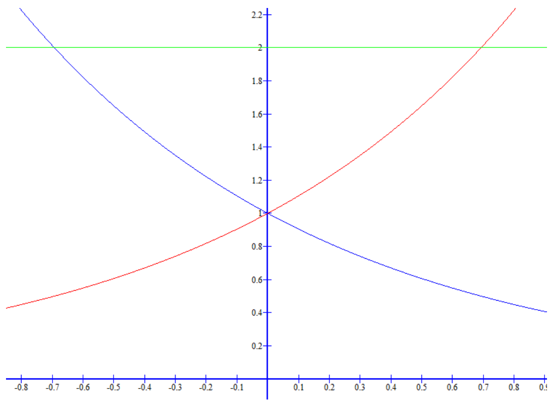
Si los dos límites son iguales, entonces ha de ocurrir que:

$$\frac{a}{2}=1 \quad\to\quad a=2$$

3.- Esboza el recinto formado por las curvas:

$$f(x)=e^x \qquad g(x)=e^{-x} \qquad y=2$$

y calcula el área de dicho recinto.



Vemos claramente que el recinto es simétrico, por tanto si calculamos la parte de la derecha, el área del recinto será su doble.

Definimos una nueva función h(x), como: $h(x)=2-g(x)$ y calculamos el punto de intersección entre las dos:

$$h(x)=0 \quad\leftrightarrow\quad h(x)=2-e^x=0 \quad\leftrightarrow\quad e^x-2=0 \quad\to\quad e^x=2 \quad\to\quad x=\ln 2$$

Por tanto para calcular el área del recinto integraremos entre 0 y ln2.

$$A=\int_0^{\ln 2}\left(2-e^x\right)dx=\left[2x-e^x\right]_0^{\ln 2}=2\ln 2-2+1=2\ln 2-1$$

Así que el área total del recinto formado por las tres curvas será: $A_T=2\cdot A=2\left(2\ln 2-1\right)=4\ln 2-2$

4.- Se dice que una matriz A cuadrada de orden 3 es ortogonal si su inversa A^{-1} coincide con su traspuesta A^t. Dado un número real x, sea la matriz B:

$$B=\begin{pmatrix}\cos x & senx & 0\\ -senx & \cos x & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) ¿Es ortogonal la matriz B?; b) ¿Es B^2 ortogonal?

Para ver si B es ortogonal vamos a comprobar si su inversa y su transpuesta coinciden.

Calculamos Primero la transpuesta: $B^t=\begin{pmatrix}\cos x & -senx & 0\\ senx & \cos x & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Y calculamos ahora su inversa, para ello calculamos su determinante:

$$|B|=\begin{vmatrix}\cos x & senx & 0\\ -senx & \cos x & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}\cos x & senx\\ -senx & \cos x\end{vmatrix}=-(\cos^2 x+sen^2x)=-1$$

Y ahora la adjunta de la transpuesta:

$$Adj\left(B^t\right)=\begin{pmatrix}-\cos x & senx & 0\\ -senx & -\cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto la inversa será:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}Adj\left(B^t\right)=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-\cos x & senx & 0\\ -senx & -\cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x & -senx & 0\\ senx & \cos x & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Que como podemos ver coincide con la transpuesta.

Para ver si B^2 es ortogonal, calcularemos primero B^2:

$$B^2=\begin{pmatrix}\cos x & senx & 0\\ -senx & \cos x & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos x & senx & 0\\ -senx & \cos x & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2 x-sen^2x & 2senx\cdot\cos x & 0\\ -2senx\cdot\cos x & \cos^2 x-sen^2x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2x & sen2x & 0\\ -sen2x & \cos 2x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Como vemos la matriz B^2 es la muy similar a la matriz B, es la misma diferenciándose solo en que los ángulos que aparecen en ella son los ángulos dobles, por tanto su determinante valdrá también -1, la adjunta de su traspuesta será también la misma excepto en lo de los ángulos, que serán otra vez los ángulos dobles y por tanto podemos decir que B^2 también es ortogonal.

OPCIÓN B

1.- Dada la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & a\\ -3 & 2 & a\\ 0 & a & -1\end{pmatrix}$$

a) **Hallar el valor o valores de *a* para que la matriz A tenga inversa.**
b) **Calcular la matriz inversa de A para *a=2.***
c) **¿Existe algún valor de *a* para el que el rango de la matriz A sea 1?.**

a) Para que la matriz A sea inversible, que tenga inversa, tiene que ocurrir que su determinante sea no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & a\\ -3 & 2 & a\\ 0 & a & -1\end{vmatrix}=(2-3a^2)-(-a^2-3)=2-3a^2+a^2+3=-2a^2+5$$

Por tanto la matriz A tiene inversa siempre y cuando a sea diferente de $a\neq\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\neq\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

b) Para a=2, la matriz A es: $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, y su determinante $|A|=-2a^2+5=-8+5=-3$

Calculamos su traspuesta:

$$A^t=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

y también la adjunta de la traspuesta:

$$Adj\left(A^t\right)=\begin{pmatrix}-6 & 3 & -6\\ -3 & 1 & -4\\ -6 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

Y la matriz inversa de A viene dada por:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\left(A^t\right)=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-6 & 3 & -6\\ -3 & 1 & -4\\ -6 & 2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & -1/3 & 4/3\\ 2 & -2/3 & 5/3\end{pmatrix}$$

C) Para que el rango de la matriz A sea 1, tiene que ocurrir que las filas sean todas dependientes o proporcionales, pero esto no es posible porque el menor $\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-2-3=-5$ que es siempre distinto de cero independientemente del valor del parámetro a. Por tanto:

$$\nexists a\in\mathbb{R}\,/\,Rang(A)=1$$

2.- Se considera la función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad -1\le x\le 0 \\ \dfrac{c}{x^2+1} & si \quad 0<x\le 1 \end{cases}$$

a) Halla el valor de c, sabiendo que *f* es continua.

b) ¿es *f* derivable en el punto de abscisa x=0?

c) Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

a) Vemos que la función es una función a trozos compuesta por dos ramas, la primera polinómica y por tanto siempre continua, y la segunda racional también siempre continua porque nunca se anula su denominador.

Para que f sea continua tiene que ocurrir que los límites laterales en el punto x=0 coincidan:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2+1=1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{c}{x^2+1}=c$$

Por tanto f es continua en todo su dominio si **c=1**

b) Para que una función será derivable en un punto, antes ha de ser continua. Por ello estudiaremos si la función es derivable para c=1.

Sabemos que una función es derivable en un punto si existen los siguientes límites por la izquierda y por la derecha y ambos coinciden.

$$f'(x_o)=f'(x_o^-)=f'(x_o^+)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Calculamos dichos límites:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[h^2+1]-[1]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{1}=0$$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h^2+1}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-h^2-1}{h^2+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2}{h\left(h^2+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h^2+1}=0$$

Por tanto, si es derivable en x=0 siempre y cuando c sea 1.

c) Para calcular dicha integral, necesitamos que la función a integrar sea continua, por tanto c ha de ser 1.

Sabemos que debido a una de las propiedades de las integrales, podemos escribir:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx$$

Por tanto integraremos en el primer intervalo la primera rama y en el segundo la segunda.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (x^2+1)dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1}dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{0} + \left[Arctg(x)\right]_{0}^{1} = \frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\ u^2$$

3.- Calcular el valor de *a* para que la recta $y = 2x+6$ sea una asíntota oblicua de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x-a}$$

Una función f(x) presenta una asíntota oblicua en la dirección de la recta *y=mx+b, si* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, o sea, no tiene asíntota horizontal, y además $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-mx] = b$.

Si la recta y=2x+6 es una asíntota oblicua de la función f(x), tiene que ocurrir que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ y además $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-mx] = 6$, por tanto:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^2+1}{x-a}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{x(x-a)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-ax} = 2$$

Límite que no depende de a.

Calculemos ahora:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{x-a} - 2x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1-2x^2+2ax}{x-a} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2ax+1}{x-a} = 2a$$

Y como este límite ha de ser igual a 6, entonces:

$$2a = 6 \quad \to \quad a = 3$$

Así que *a* tiene que valer 6 para que la recta $y = 2x+6$ sea una asíntota oblicua

4.- (2,5 puntos) Sea $f:[0,3] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2$. Calcula el punto de la gráfica de f más próximo al punto *P(18,0)* y calcula también el más alejado.

Cualquier punto de la curva x^2 es de la forma ***Q(x,x²)***, y la distancia entre dos puntos viene dada por el módulo del vector que definen.

El vector entre los puntos P y Q viene dado por: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x, x^2) - (18,0) = (x-18, x^2)$

Así que la distancia entre P y Q será: $d(PQ) = \sqrt{(18-x)^2 + x^4}$

Por tanto la función a optimizar es la función: $d(x) = \sqrt{(18-x)^2 + x^4}$

Derivamos la función: $d'(x) = \frac{2(x-18)+4x^3}{2\sqrt{(18-x)^2+x^4}} = \frac{2x^3+x-18}{\sqrt{(18-x)^2+x^4}}$

Que si la igualamos a cero:

$$2x^3 + x - 18 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(2x^2+4x+9)=0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Encontrarnos por Ruffini la solución x=2.

Si d '(2) = 0 y d ''(2) < 0, entonces x = 2 es un máximo relativo.

Si d '(2) = 0 y d ''(2) > 0, entonces x = 2 es un mínimo relativo.

Calculamos la segunda derivada y llegamos a:

$$d''(x) = \frac{(6x+1)\cdot\sqrt{(18-x)^2+x^4} - (2x^3+x-18)\cdot\dfrac{2x^3+x-18}{\sqrt{(18-x)^2+x^4}}}{\left(\sqrt{(18-x)^2+x^4}\right)^2}$$

Y si sustituimos en x=2, tenemos:

$$d''(2) = \frac{(+)\cdot(+)-0}{(+)} > 0$$

Por tanto x=2 es un mínimo y el punto más próximo será el **(2,4)**

cuya distancia a la curva es $d(2) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{(18-2)^2+2^4} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17} \approx 16{,}5\ u$

Como también me piden el punto mas alejado, éste tiene que estar en los extremos del intervalo del dominio, es decir en x = 0 o en x = 3

Si tomamos el punto **O(0,0),** vector $\overrightarrow{OP}$ = (18 – 0, 0 – 0) = (18,0)

La distancia es $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{18^2+0} = 18\ u$

Si tomamos el punto **A(3,9),** vector $\overrightarrow{AP}$ = (18 – 3, 9 – 0) = (15,9)

La distancia es $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{(18-2)^2+2^4} = \sqrt{377} \approx 19{,}5\ u$.

Por tanto el punto más alejado del P es el **A(3,9).**