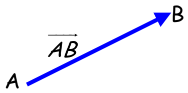
Tema 11: Problemas Métricos

11.1.- Distancia entre dos puntos :



$d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

La distancia entre dos puntos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ es el módulo del vector que une dichos puntos:

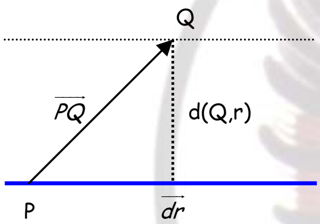
$$d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

Ejemplo 1: ***Calcular la distancia entre los puntos A(3,-2,1) y B(5,3,-4)***

$$d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}=\sqrt{(5-3)^2+(3+2)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$

11.2.- Distancia de un punto a una Recta :

Es la menor de las distancias entre el punto dado y un punto cualquiera de la recta.



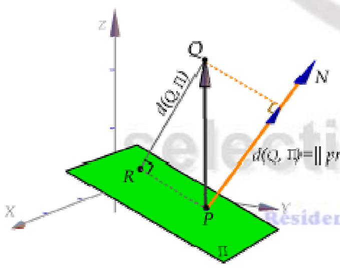
Si la recta r está definida por $\begin{cases} p\in r \\ \overrightarrow{dr}\end{cases}$ y sea Q un punto exterior. La distancia de Q a la recta r viene dada por:

$$d(Q,r)=\frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{dr}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|}$$

Ejemplo 2: ***Calcular la distancia entre el punto Q(1,-1,2) y la recta*** $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$

$$d(Q,r)=\frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{dr}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|}=\frac{\|(0,-1,2)\wedge(2,1,-2)\|}{\|(2,1,-2)\|}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

11.3.- Distancia de un punto a un Plano :



Sean el plano $\pi: ax+by+cz+d=0$ y el punto $P(p_1,p_2,p_3)$, la distancia entre ambos se calcula mediante la expresión:

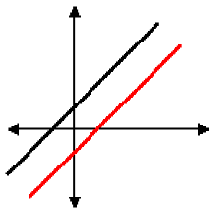
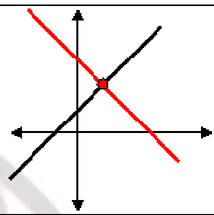
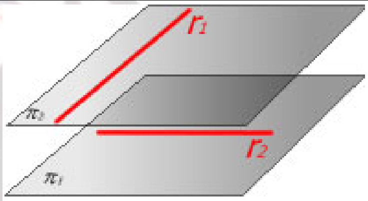
$$d(P,\pi)=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}$$

Ejemplo 3: ***Calcular la distancia entre el punto Q(1,-1,2) y el plano*** $\pi: x-2y+z=1$

$$d(P,\pi)=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}=\frac{|1+2+2-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

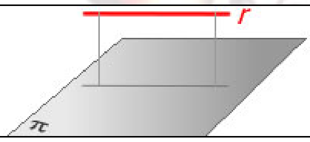
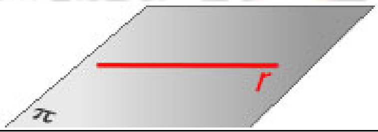
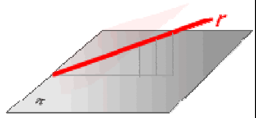
11.4.- Distancia entre dos rectas :

Sean la recta r y la recta s, dadas por $r:\begin{cases}\overrightarrow{dr}\\ P_r\end{cases}$ y $s:\begin{cases}\overrightarrow{ds}\\ Q_s\end{cases}$

Posición Relativa	Distancia	Dibujo
RECTAS COINCIDENTES	$\boxed{d(r,s)=0}$	
RECTAS PARALELAS	$d(r,s)=d(P_r,s)$ Es igual a la distancia de un punto de la recta ***r*** a la recta ***s***. $\boxed{d(P_s,r)=\dfrac{\left\Vert \overrightarrow{P_rQ_s}\wedge\overrightarrow{ds}\right\Vert}{\left\Vert \overrightarrow{ds}\right\Vert}}$	
RECTAS SECANTES	$\boxed{d(r,s)=0}$	
RECTAS QUE SE CRUZAN	$\boxed{d(r,s)=\dfrac{\left\vert \det(\overrightarrow{P_rQ_s},\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds})\right\vert}{\left\Vert \overrightarrow{dr}\wedge\overrightarrow{ds}\right\Vert}}$ Donde: $r:\begin{cases}\overrightarrow{dr}\\ P\end{cases}$ y $s:\begin{cases}\overrightarrow{ds}\\ Q\end{cases}$	

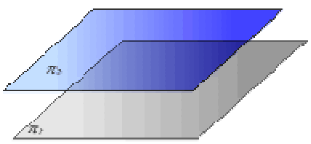
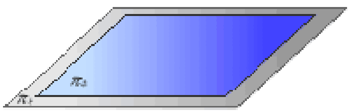
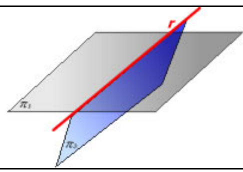
11.5.- Distancia de una recta a un plano:

Sea la recta r dada por $r:\begin{cases}\overrightarrow{dr}\\ P_r\end{cases}$ y el plano π dado por $\pi: ax+by+cz+d=0$

Posición Relativa	PARALELOS	RECTA CONTENIDA EN PLANO	SECANTES
Distancia	$d(r,\pi)=d(P_r,\pi)$ $d(P_r,\pi)=\dfrac{\left\vert ap_1+bp_2+cp_3+d\right\vert}{\left\Vert \overrightarrow{n_\pi}\right\Vert}$	$d(r,\pi)=0$	$d(r,\pi)=0$
Dibujo			

11.6.- Distancia entre dos planos:

Sean los planos π y π' dados por $\pi: ax+by+cz+d=0$ y $\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$

Posición Relativa	PARALELOS	COINCIDENTES	SECANTES
Distancia	$d(\pi,\pi')=\dfrac{\left\vert d-d'\right\vert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	$d(\pi,\pi')=0$	$d(\pi,\pi')=0$
Dibujo			

11.7.- Angulos.

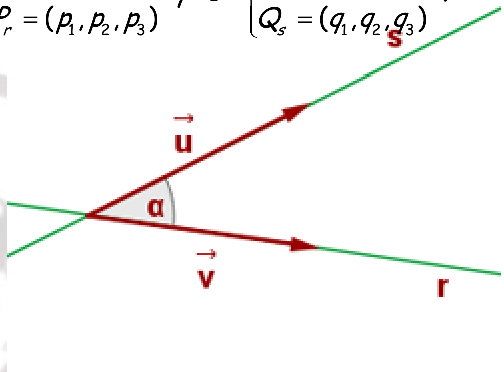
Para estudiar el ángulo entre dos rectas, recta y plano y dos planos, necesitaremos los vectores directores de las rectas y los vectores normales de los planos. Con la expresión del producto escalar, calcularemos el menor ángulo que forman las direcciones dadas por los vectores directores y normales.

11.8.- Angulo entre dos rectas.

Sean la recta r y la recta s, dadas por $r:\begin{cases}\overrightarrow{dr}=(r_x,r_y,r_z)\\ P_r=(p_1,p_2,p_3)\end{cases}$ y $s:\begin{cases}\overrightarrow{ds}=(s_x,s_y,s_z)\\ Q_s=(q_1,q_2,q_3)\end{cases}$.

El ángulo α que forman ambas rectas viene dado por:

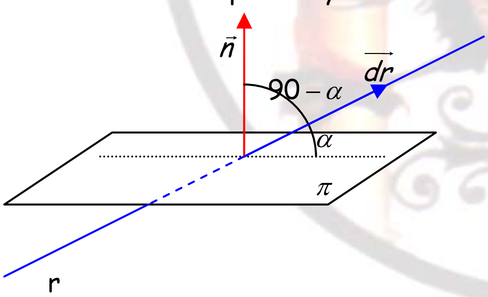
$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{ds}\right|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{ds}\right\|}=\frac{\left|r_x\cdot s_x+r_y\cdot s_y+r_z\cdot s_z\right|}{\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}\cdot\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}}}$$



11.9.- Angulo entre recta y plano.

Sean la recta r, dada por $r:\begin{cases}\overrightarrow{dr}=(r_x,r_y,r_z)\\ P_r=(p_1,p_2,p_3)\end{cases}$ y el plano $\pi: ax+by+cz+d=0$

En ángulo α formado por la recta y el plano es complementario del ángulo que forman el vector normal del plano $\vec{n}$ y el vector director de la recta $\overrightarrow{dr}$

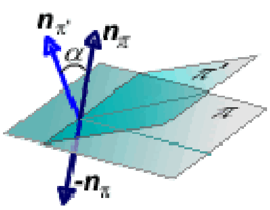


$$\boxed{sen\alpha=sen(r,\pi)=\left|\cos(\overrightarrow{dr},\vec{n})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}}$$

La recta r, será paralela al plano π, cuando el producto escalar $\overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=0$, o lo que es lo mismo: $r_x\cdot a+r_y\cdot b+r_z\cdot c=0$.

11.10.- Angulo entre dos planos.

Sean los planos $\pi: ax+by+cz+d=0$ y $\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$, el ángulo entre ambos es el mismo que el ángulo entre sus vectores normales $\vec{n}$ y $\vec{n}'$.



$$\boxed{\cos(\pi,\pi')=\cos(\vec{n},\vec{n}')=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{\left\|\vec{n}\right\|\cdot\left\|\vec{n}'\right\|}=\frac{\left|aa'+bb'+cc'\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}}$$

11.11.- Recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan

Para calcular la recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan, seguiremos el siguiente método:

- Escribimos las rectas r y s en paramétricas.
- Obtenemos de cada una de ellas un punto genérico (A y B respectivamente), y sus vectores directores $\overrightarrow{dr}$ y $\overrightarrow{ds}$.
- Hallamos las componentes del vector que une los puntos A y B , $\overrightarrow{AB}$, como éste vector es ortogonal a $\overrightarrow{dr}$ y $\overrightarrow{ds}$, los productos escalares $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{dr}=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ds}=0\end{cases}$ son nulos, y del sistema formado podemos despejar los dos parámetros.
- Sustituimos los valores hallados en las expresiones genéricas de A y B, y ya tenemos estos puntos. Con un punto y el vector, ya tenemos la ecuación de la recta.

Ejemplo 4: ***Obtener la perpendicular común a las rectas*** $r:\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}$ ***y*** $s:\begin{cases}x=0\\ z=3\end{cases}$

Para obtener la perpendicular común a dos rectas que se cruzan, lo primero es escribir las rectas en forma paramética:

Recta r:

$$\left.\begin{matrix}\vec{n}_1=(0,1,0)\\ \vec{n}_2=(0,0,1)\end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{dr}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,0,0) \rightarrow \text{Si } x=1 \rightarrow \text{Un punto de r es el } P(1,0,0) \rightarrow \begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

Recta s:

$$\left.\begin{matrix}\vec{n}_1=(1,0,0)\\ \vec{n}_2=(0,0,1)\end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{ds}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(0,-1,0) \rightarrow \text{Si } y=1 \rightarrow \text{Un punto de r es el } Q(0,1,3) \rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=1-\lambda\\ z=3\end{cases}$$

Obtenemos un punto genérico de cada una: $\begin{matrix}A\in r; A(1+t,0,0)\\ B\in s; B(0,1-\lambda,3)\end{matrix}$

Hallamos las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}=B-A=(-1-t,1-\lambda,3)$

Y este vector tiene que ser perpendicular al vector director de r $\overrightarrow{dr}$ y al vector director de s $\overrightarrow{ds}$.

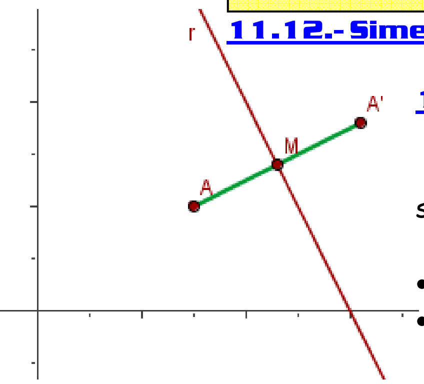
$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{ds}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix}(1,0,0)\cdot(-1-t,1-\lambda,3)=0\\ (0,-1,0)\cdot(-1-t,1-\lambda,3)=0\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}-1-t=0\\ -1+\lambda=0\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}t=-1\\ \lambda=1\end{matrix}$$

Si sustituimos en las rectas r y s, obtenemos los puntos: A(0,0,0) y B(0,0,3)

Ya tenemos dos puntos de la recta, como $\overrightarrow{AB}=B-A=(0,0,3)$, la recta perpendicular común a r y s, es:

$$r'\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=3t\end{cases}$$

11.12.- Simetrías



11.12.1.- Simétrico de un punto A respecto de una recta.

Para hallar el simétrico de un punto respecto de una recta, seguiremos los pasos siguientes:

- Hallamos el plano perpendicular a la recta r, que pasa por el punto A.
- Hallamos el punto de intersección, M, entre la recta y el plano.

- Hallamos el punto simétrico A' con la condición de que M sea el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

* Las coordenadas del punto medio de un segmento se calculan: $M = \frac{A + A'}{2}$

Ejemplo 5: Calcular las coordenadas del punto simétrico del (1,3,7) respecto de la recta r: $x - 1 = y + 3 = \frac{z - 4}{2}$

Calculamos el plano perpendicular a ***r*** que contiene al punto A(1,3,7).

Para ello hacemos el producto escalar del vector director de la recta ***dr=(1,1,2)*** por el vector perpendicular a la recta y que pasa por le punto (x-1,y-3,z-7)

$$(1,1,2)\cdot(x - 1, y - 3, z - 7) = 0 \rightarrow \boxed{\pi : x + y + 2z - 18 = 0}$$

Calculamos el punto de intersección de la recta r y el plano π.

Para ello escribimos la recta r en forma paramétrica $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ y la sustituimos en el plano π.

$$1 + t - 3 + t + 8 + 4t - 18 = 0 \rightarrow 6t - 12 = 0 \rightarrow t = 2$$

Y sustituyendo en la ecuación paramétrica obtenemos el punto deseado.

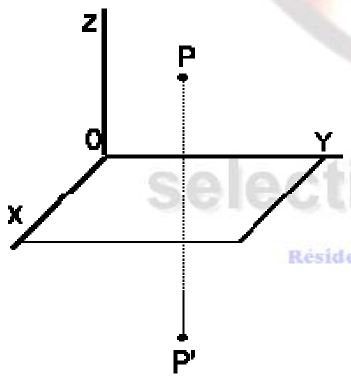
Punto de intersección de r y π $\boxed{H = (3, -1, 8)}$

H es el punto medio entre A y su simétrico A, por tanto: $H = \frac{A + A'}{2}$

$$A' = 2H - A \rightarrow (5,-2,16)-(1,3,7)=(5,-5,9).$$

Y el punto simétrico del (1,3,7) es el punto $A' = (5, -5, 9)$

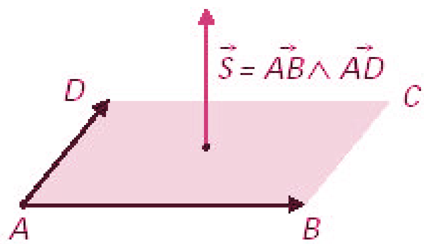
11.12.2.- Simétrico de un punto A respecto de un plano.



Para hallar el simétrico de un punto respecto de un plano, seguiremos los pasos siguientes:

- Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto A.
- Hallamos el punto de intersección, M, entre la recta y el plano.
- Hallamos el punto simétrico A' con la condición de que M sea el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

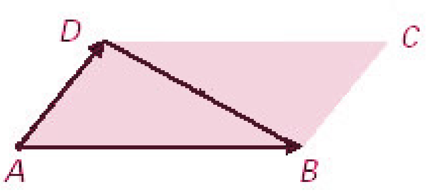
11.13.- Área de un paralelogramo.



El área de un paralelogramo de vértices A,B,C,D, la calcularemos:

$$\boxed{Area = S = \left\| \vec{AB} \wedge \vec{AD} \right\|}$$

11.14.- Área de un triángulo.



El área de un triángulo de vértices A,B y D, se calcula como la mitad del área del paralelogramo de vértices A,B,C y D.

$$Area = S_{\hat{T}} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|}{2}$$

11.15.- Problemas

1.- Hallar la distancia del punto P al plano determinado por los puntos A(1,0,1); B(0,0,1); C(1,2,0), siendo P en que la recta $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{-1}$ corta al plano $\pi: 2x + y - z + 4 = 0$

2.- Calcular la distancia entre las rectas $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{4}$ y $s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 \\ z = 8 + 2t \end{cases}$

3.- Obtener las ecuaciones de los planos que son perpendiculares a la recta $r: \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases}$ y distan 3 unidades del punto P(-1,1,2). Calcular el seno del ángulo formado por r y el plano coordenado OXY.

4.- Obtener el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi: 2x + y + 3z = 6$ con los ejes coordenados.

5.- Calcular la distancia del punto P(1,-3,1) a la recta $r: \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$

6.- Calcular las coordenadas del punto simétrico del (1,3,7) respecto de la recta dada por las ecuaciones $x - 1 = y + 3 = \frac{z-4}{2}$

7.- Hallar el punto de la recta $r: x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ que equidista del punto A(1,2,1) y del origen de coordenadas.

8.- Consideramos los planos $\pi: 2x + 5 = 0$ y $\pi' = 3x + 3y - 4 = 0$ ¿Qué ángulo determinan ambos planos?. Hallar el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos.

9.- Hallar el punto de la recta $r: \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ cuya distancia al punto P(1,0,2) sea $\sqrt{5}$

10.- Encontrar los puntos de $r: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ que disten $\frac{1}{3}$ del plano $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$

11.- Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ y otro lado sobre la recta $s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$. Calcula el área del cuadrado.

12.- Hallar el plano de la familia $mx + y + z - (m+1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen.

13.- Explicar como se obtiene la perpendicular común a dos rectas que se cruzan. Obtener la perpendicular común a las rectas $r:\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$

14.- a) Determinar la ecuación de un plano π pasando por el punto A(-1,-1,1) y siendo $\vec{v}(1,-2,-1)$ un vector normal al mismo. b) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta s que se obtiene al cortarse el plano $\pi : x - 2y - z - 2 = 0$ con el plano $\pi' : z = 1$ c) Determinar las ecuaciones paramétricas e la recta r que pasa por los puntos B(1,1,2) y C(1,-1,2). d) Encontrar la posición relativa entre las rectas r y s de los apartados anteriores. e) Hallar un punto D de la recta r que esté a la misma distancia de los puntos B y C.

15.- Considera el triángulo que tiene por vértices los puntos A(1,1,2), B(1,0,-1) y C(1,-3,2)
A) Razonar si es rectángulo. B) Calcular la recta r que pasa por B y es perpendicular al lado AC
C) Calcular la recta S que pasa por los puntos A y C. d) D es el punto de corte de r y s, calcular el módulo de $\overrightarrow{BD}$. E) Calcular la longitud del lado AC. F) Calcular el producto vectorial de los vectores AC y AB y comprueba que su módulo es igual a h·b, siendo h el módulo del vector BD y b la longitud del lado AC (calculados anteriormente).

16.- Consideramos los puntos A(2,1,2) y B(0,4,1) y la recta r: $x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$.

a) Determinar un punto C de la recta que equidiste de los puntos A y B
b) Calcular el área del triángulo ABC

11.16.- Soluciones:

1.- Hallar la distancia del punto P al plano determinado por los puntos A(1,0,1); B(0,0,1); C(1,2,0), siendo P en que la recta $r:\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{-1}$ corta al plano $\pi : 2x + y - z + 4 = 0$

Lo primero que vamos a hacer es calcular la ecuación del plano, para calcularla, necesitamos 2 vectores directores y un punto.

Vamos a calcular los vectores AB, AC, AX, donde X es el punto(x,y,z) del plano:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,0,0)$$
$$\overrightarrow{AC} = (0,2,-1)$$
$$\overrightarrow{AX} = (x-1, y, z-1)$$

Estos tres vectores han de ser coplanarios, y para ello tienen que cumplir que su producto, mixto sea cero.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ x-1 & y & z-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (-2z+2) - (y) = 0 \rightarrow -y - 2z + 2 = 0$$

Por tanto la ecuación del plano pedido es: $\boxed{y+2z-2=0}$

Lo siguiente es calcular P. Para ello escribimos la ecuación de la recta ***r*** en forma paramétrica, y la sustituimos en la ecuación del plano π

$$r\begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=4+3\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases} \qquad \pi: y+2z-2=0$$

$$2(2+2\lambda)+(4+3\lambda)-(4-\lambda)+4=0 \Rightarrow 4-4\lambda+4+3\lambda-4+\lambda+4=0 \Rightarrow 8\lambda+8=0$$

De donde obtenemos $\lambda=-1$

Si sustituimos $\lambda=-1$ en la ecuación paramétrica de la recta, obtenemos el punto pedido: $\boxed{P(0,1,5)}$

La distancia de un punto a un plano se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{d(P,\pi)=\frac{|ap_x+bp_y+cp_z+d|}{\|\vec{n}\|}}$$

Como P(0,1,5) y $\pi: y+2z-2=0$, sustituyendo, obtenemos:

$$d(P,\pi)=\frac{|ap_x+bp_y+cp_z+d|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|1+10-2|}{\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$$

2.- Calcular la distancia entre las rectas $r:\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{4}$ ***y*** $s:\begin{cases} x=5+t \\ y=-1 \\ z=8+2t \end{cases}$

Para calcular la distancia entre dos rectas, lo primero que hay que hacer es ver la posición relativa de ambas rectas.

$$r\begin{cases} P(2,2-1) \\ \vec{dr}=(3,-1,4) \end{cases} \quad s\begin{cases} Q(5,-1,8) \\ \vec{ds}=(1,0,2) \end{cases}$$

Vemos que sus vectores directores no son proporcionales, por tanto las rectas, o se cortan o se cruzan. *Si se cortan, la distancia entre ellas es 0, y si se cruzan la distancia se calcula utilizando la expresión:*

$$\boxed{d(r,s)=\frac{\left|\det(\vec{dr},\vec{ds},\vec{PQ})\right|}{\left\|\vec{dr}\wedge\vec{ds}\right\|}}$$

Si el rango de $\begin{pmatrix} \vec{dr} \\ \vec{ds} \\ \vec{PQ} \end{pmatrix}$ es 2, los vectores son coplanarios y las rectas se cortan, si el rango de $\begin{pmatrix} \vec{dr} \\ \vec{ds} \\ \vec{PQ} \end{pmatrix}$ es 3, entonces los vectores no son coplanarios y las rectas se cruzan.

$$\begin{vmatrix} \vec{dr} \\ \vec{ds} \\ \vec{PQ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = (-9-18)-(-6-12) = -27+18 = -9 \neq 0$$, Por tanto se cruzan.

Como se cruzan, calculamos $\left\|\overrightarrow{dr} \wedge \overrightarrow{ds}\right\| = \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right\| = \left\|-2i-2j+k\right\| = \sqrt{9}$

Y ahora calculamos la distancia: $d(r,s) = \dfrac{\left|\det(\vec{dr}, \vec{ds}, \vec{PQ})\right|}{\left\|\vec{dr} \wedge \vec{ds}\right\|} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = \sqrt{9} = 3$

3.- Obtener las ecuaciones de los planos que son perpendiculares a la recta $r: \begin{cases} 3x-2y+2z=6 \\ x+z=3 \end{cases}$ y distan 3 unidades del punto P(-1,1,2). Calcular el seno del ángulo formado por r y el plano coordenado OXY.

Para la ecuación del plano $\perp$ a una recta, necesitamos el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{dr} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2i+2j)-(-2k+3j) = -2i+2j+2k-3j = (-2,-1,2)$$

Sea $\vec{u} = (x,y,z)$ un vector perpendicular a la recta ***r***, un haz de planos perpendiculares a esta recta viene dado por: $\vec{u} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$ ➔ $(x,y,z)\cdot(-2,-1,2) = 0$

Por tanto el haz de planos es: $-2x-y+2z+K=0$

Si la distancia de P(-1,1,2) al plano es 3. Tenemos que:

$$d(P,\pi) = \frac{\left|ap_x + bp_y + cp_z + d\right|}{\left\|\vec{n}\right\|} = \frac{\left|2-1+4+k\right|}{\sqrt{9}} = \frac{\left|5+K\right|}{3} = 3$$

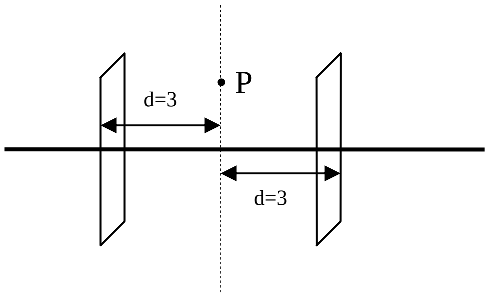
De donde:

$|5+K| = 9$ que al resolver obtenemos: K=4 y K= -14

Por tanto las ecuaciones de los planos pedidos son:

$$\boxed{\begin{matrix} \pi_1 : -2x-y+2z+4=0 \\ \pi_2 : -2x-y+2z-14=0 \end{matrix}}$$

Como el punto P no pertenece a la recta (porque no cumple su ecuación), tenemos dos planos que están a una distancia de 3 unidades, uno por delante del punto y otro por detrás.



Para calcular el seno formado por una recta un plano utilizamos la ecuación:

$$\boxed{Sen(r,\pi)=\left|Cos(r,n_\pi)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{ds}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|\cdot\left\|\vec{n}\right\|}=\frac{\left|(-2,-1,2)\cdot(0,0,\lambda)\right|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{\lambda^2}}=\frac{2\lambda}{3\lambda}=\frac{2}{3}}$$

Donde el vector $n_\pi=(0,0,\lambda)$ es el vector normal del plano OXY (Z=0). Si cogemos como vector normal el (0,0,1) ó (0,0,2) ….obtenemos el mismo resultado, de forma general utilizamos el vector $n_\pi=(0,0,\lambda)$.

4.- Obtener el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi:2x+y+3z=6$ ***con los ejes coordenados.***

Para resolver este ejercicio de forma rápida escribiremos la ecuación del plano en forma segmentaria, ya que esta ecuación nos da los puntos de corte con los respectivos ejes.

$$2x+y+3z=6 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{6}x+\frac{1}{6}y+\frac{3}{6}z=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=1$$

Por tanto los vértices del triángulo son m(3,0,0), n(0,6,0) y t(0,0,2).

Y ahora *para calcular el área del triángulo utilizamos el módulo del producto vectorial.* Sabemos que el área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{mn}$ y $\overrightarrow{mt}$ vale el módulo de su producto vectorial, por tanto el área del triángulo formado por ellos es la mitad.

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{mn}\wedge\overrightarrow{mt}\right\|=\frac{1}{2}\left\|(12,6,18)\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{504}=3\sqrt{14}}$$

5.- Calcular la distancia del punto P(1,-3,1) a la recta $r:\begin{cases}x+y-2z=-3\\3x+2y+z=1\end{cases}$

Para calcular la distancia de un punto a una recta, necesitamos el vector director de la recta y un punto de ella.

$$dr=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&1&-2\\3&2&1\end{vmatrix}=(i+2k-6j)-(3k-4i+j)=5\hat{i}-\hat{k}-7\hat{j}=(5,-7,-1)$$

Para obtener un punto, resolvemos el sistema dando a z el valor 0, Z=0.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ 3x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ 0-y=10 \end{cases} \Rightarrow y=10 \Rightarrow x=7$$

Por tanto un punto de la recta es A(7,-10,0)

La distancia de un punto a una recta viene dada por: $\boxed{d(P,r)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{dr}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|}}$

$\overrightarrow{AP}=(7,-10.0)-(1,-3,1)=(6,-7,-1)$

$$\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{dr}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -7 & -1 \\ 5 & -7 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & -1 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} j & k \\ -7 & -1 \end{vmatrix}=-(-j+7k)=j-7k=(0,1,-7)$$

Y ahora:

$$\boxed{d(P,r)=\frac{\left\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{dr}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{75}}=\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

6.- Calcular las coordenadas del punto simétrico del (1,3,7) respecto de la recta dada por las ecuaciones $x-1=y+3=\dfrac{z-4}{2}$

Calculamos el plano perpendicular a ***r*** que contiene al punto A(1,3,7).

Para ello hacemos el producto escalar del vector director de la recta ***dr=(1,1,2)*** por el vector perpendicular a la recta y que pasa por le punto (x-1,y-3,z-7)

$$(1,1,2)\cdot(x-1,y-3,z-7)=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+y+2z-18=0}$$

Calculamos el punto de intersección de la recta r y el plano π.

Para ello escribimos la recta r en forma paramétrica $r:\begin{cases} x=1+t \\ y=-3+t \\ z=4+2t \end{cases}$ y la sustituimos en el plano π.

$$1+t-3+t+8+4t-18=0 \Rightarrow 6t-12=0 \Rightarrow t=2$$

Y sustituyendo en la ecuación paramétrica obtenemos el punto deseado.

Punto de intersección de r y π $\boxed{H=(3,-1,8)}$

H es el punto medio entre A y su simétrico A'.

Para calcular el punto medio de un segmento utilizamos: $\boxed{H=\dfrac{A+A'}{2}}$

$$A' = 2H - A$$ ➔ (6,-2,16)-(1,3,7)=(5,-5,9).

Por tanto el punto simétrico del (1,3,7) es el punto $\boxed{A' = (5,-5,9)}$

7.- Hallar el punto de la recta $r: x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ ***que equidista del punto A(1,2,1) y del origen de coordenadas.***

Lo primero es escribir la ecuación de la recta en forma paramétrica: $r: \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Un punto P, genérico de esta recta es: $P = (t, -2+2t, 3-t)$

Tiene que ocurrir que $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \left\|\overrightarrow{PA}\right\|$

$$\overrightarrow{OP} = (t, -2+2t, 3-t) \text{ y } \overrightarrow{PA} = (1-t, 2+2-2t, 1-3+t) = (1-t, 4-2t, -2+t)$$

$$\sqrt{t^2 + 4 + 4t^2 - 8t + 9 + t^2 - 6t} = \sqrt{1 + t^2 - 2t + 16 + 4t^2 - 16t + 4 + t^2 - 4t}$$

$$6t^2 - 14t + 13 = 6t^2 - 22t + 21$$

De donde $8t - 8 = 0$ ➔ $\boxed{t = 1}$

Por tanto el punto P de la recta que equidista del origen y del punto A es:

$$\boxed{P = (1,0,2)}$$

8.- Consideramos los planos $\pi: 2x + 5 = 0$ ***y*** $\pi' = 3x + 3y - 4 = 0$ ***¿Qué ángulo determinan ambos planos?. Hallar el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos.***

Para ver el ángulo que determinan dos planos, lo hacemos usando sus vectores normales:

$$Cos(\pi, \pi') = \frac{n \cdot n'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} = \frac{(2,0,0) \cdot (3,3,0)}{2\sqrt{18}} = \frac{6}{2\sqrt{18}} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ➔ } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Para que el plano sea perpendicular a ambos, su vector normal también lo tiene que ser.

$\vec{n}'' = \vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6\hat{k}$ ➔ De aquí que el vector $\vec{n}'' = (0,0,6)$ ➔ Entonces el plano que buscamos es el plano: 6z+k=0, y como dice que pasa por el (0,0,0) entonces k=0 ➔ $\boxed{z = 0}$ es el plano pedido.

9.- Hallar el punto de la recta $r:\begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=1+2t \end{cases}$ ***cuya distancia al punto P(1,0,2) sea*** $\sqrt{5}$

Un punto genérico de la recta es el (t,3-t,1+2t) como la distancia de un punto a una recta se calcula:

$d(P,r)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{dr}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|}$ *Lo primero es calcular el vector AP(1-t,t-3,2-2t) y dr(1,-1,2)*

$$\left\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{dr}\right\|=\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-t & t-3 & 2-2t \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\right\|=\left\|(-4\hat{i}+2\hat{k})\right\|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5} \text{ y como } \|dr\|=2$$

Entonces la distancia del punto a la recta es $\sqrt{5}$.

Por tanto si calculamos en punto de intersección entre la recta r y otra recta perpendicular que pase por P, tenemos el punto buscado.

Sea Q el punto (t,3-t,1+2t), y P(1,0,2) entonces el vector PQ=(t-1,3-t,2t-2), y el producto escalar PQ·dr=0 porque ambos vectores son perpendiculares.

PQ·dr=(t-1,3-t,2t-1)· (1,-1,2)=t-1+t-3+4t-2=0 ➔ 6t-6=0 ➔ t=1

Por tanto el punto de la recta que está a una distancia $\sqrt{5}$ del punto P es: $\boxed{Q:(1,2,3)}$

10.- Encontrar los puntos de $r:\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ ***que disten*** $\frac{1}{3}$ ***del plano*** $\pi: 2x-y+2z+1=0$

Lo primero es ver cual es la posición relativa de la recta y el plano.

Escribimos La matriz M y M*

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Rang(M)=3=Rang(M*), Por tanto recta y plano son secantes.

Tienen que existir dos puntos de la recta a una distancia $\frac{1}{3}$ del plano, uno por encima y otro por debajo.

Escribimos la recta en forma paramétrica, para ello necesitamos el vector director y un punto:

$$\vec{dr}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}=(-1,1,-1)$$ Punto (si hacemos Z=0) ➔ A(0,0,0) Por tanto

$$r:\begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$$

Un punto cualquiera de la recta es (-t,t,-t), pues calculamos la distancia de un punto a un plano y la igualamos a $\frac{1}{3}$. Y eso nos dará dos valores para t. $\pi: 2x-y+2z+1=0$

$$d(P,\pi)=\frac{|ap_x+bp_y+cp_z+d|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|-2t-t-2t+1|}{\sqrt{9}}=\frac{|-5t+1|}{3}=\frac{1}{3}$$ ➔ $|-5t+1|=1$ ➔ $\begin{cases} t=0 \\ t=\frac{2}{5} \end{cases}$

Por tanto los puntos situados a una distancia $\frac{1}{3}$ del plano son $\boxed{(0,0,0)\text{ y }\left(\frac{-2}{5},\frac{2}{5},\frac{-2}{5}\right)}$

11.- Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r:\begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ x-2y+2z=0 \end{cases}$ y otro lado sobre la recta $s:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-2}$. Calcula el área del cuadrado.

Lo primero que tenemos que hacer es ver la posición relativa de las rectas r y s:

Calculamos el vector director de la recta r:

$$\vec{dr}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=8\hat{i}-4\hat{j}-8\hat{k}=(8,-4,-8)$$ ➔ Si comparamos $\vec{dr}$ y $\vec{ds}$ vemos que $\vec{dr}=4\cdot\vec{ds}$

Por tanto las rectas r y s son paralelas.

Calculamos la distancia entre ellas, y el área del cuadrado será esa distancia al cuadrado.

Necesitamos un punto de s, A=(3,1,-5) ds=(2,-1,-2) y un punto de r, P(0,0,0) por ser homogéneo el sistema.

Calculamos el vector $\overrightarrow{AP}=(-3,-1,5)$

$$\overrightarrow{AP}\wedge\vec{ds}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=7\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}=(7,4,5)$$

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{\|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{ds}\|}{\|\vec{ds}\|}=\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{9}}=\sqrt{10}$$

Por tanto el área del cuadrado: $\boxed{A=\left(\sqrt{10}\right)^2=10}$

12.- Hallar el plano de la familia $mx+y+z-(m+1)=0$ que está situado a distancia 1 del origen.

$$d(P,\pi)=\frac{|ap_x+bp_y+cp_z+d|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|-(m+1)|}{\sqrt{m^2+2}}=\frac{m+1}{\sqrt{m^2+2}}=1 \quad \rightarrow \quad (m+1)^2=m^2+2 \quad \rightarrow$$

$$m^2+2m-m^2=1$$

De donde $m=\dfrac{1}{2}$

Por tanto el plano de la familia es: $\dfrac{1}{2}x+y+z-\dfrac{3}{2}=0 \rightarrow \boxed{x+2y+2z-3=0}$

13.- Explicar como se obtiene la perpendicular común a dos rectas que se cruzan. Obtener la perpendicular común a las rectas $r:\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=0 \\ z=3 \end{cases}$

Para obtener la perpendicular común a dos rectas que se cruzan, lo primero es escribir las rectas en forma paramética:

<u>Recta r:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1=(0,1,0) \\ \vec{n}_2=(0,0,1) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{dr}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,0,0) \rightarrow \text{Si x=1} \rightarrow \text{Un punto de r es el P(1,0,0)} \rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

<u>Recta s:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1=(1,0,0) \\ \vec{n}_2=(0,0,1) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{ds}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(0,-1,0) \rightarrow \text{Si y=1} \rightarrow \text{Un punto de r es Q(0,1,3)} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{cases}$$

Obtenemos un punto genérico de cada una: $\begin{array}{l} A\in r; A(1+t,0,0) \\ B\in s; B(0,1-\lambda,3) \end{array}$

Hallamos las componentes del vector $\vec{AB}$; $\vec{AB}=B-A=(-1-t,1-\lambda,3)$

Y este vector tiene que ser perpendicular al vector director de r $\vec{dr}$ y al vector director de s $\vec{ds}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{dr}\cdot\vec{AB}=0 \\ \vec{ds}\cdot\vec{AB}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} (1,0,0)\cdot(-1-t,1-\lambda,3)=0 \\ (0,-1,0)\cdot(-1-t,1-\lambda,3)=0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -1-t=0 \\ -1+\lambda=0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} t=-1 \\ \lambda=1 \end{array}$$

Si sustituimos en las rectas r y s, obtenemos los puntos: A(0,0,0) y B(0,0,3), ya tenemos dos puntos de la recta, como $\vec{AB}=B-A=(0,0,3)$, la recta perpendicular es: $r'\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=3t \end{cases}$

14.- a) Determinar la ecuación de un plano π pasando por el punto A(-1,-1,1) y siendo $\vec{v}(1,-2,-1)$ un vector normal al mismo.

Creamos un haz de planos paralelos de la forma: X-2Y-Z+K=0

Y calculamos que plano del haz pasa por ese punto, sustituyendo el punto en el haz de planos paralelos.

-1-2(-2)-1+k=0 → -1+4-1+K=0 → K=-2 → $\pi: x-2y-z-2=0$

b) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta s que se obtiene al cortarse el plano $\pi: x-2y-z-2=0$ con el plano $\pi': z=1$

Si sustituimos $\pi': z=1$ en el plano $\pi: x-2y-z-2=0$, obtenemos la recta $r: x-2y=3$

Que es la forma general de la ecuación de una recta, si operamos tenemos: $y=\dfrac{x-3}{2}$

La forma paramétrica de r: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$

Si lo hacemos de la forma habitual; calculamos el vector director de r: $\overrightarrow{dr}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-2,-1,0)$

Y para calcular un punto, z=1, y=0, x=3; por tanto la recta r tiene por ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x=3-2t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$$

c) Determinar las ecuaciones paramétricas e la recta r que pasa por los puntos B(1,1,2) y C(1,-1,2)

Calculamos el vector $\overrightarrow{BC}=C-B=(0,-2,0)$, y con el vector y un punto (1,1,2) escribimos las paramétricas: r: $\begin{cases} x=1 \\ y=1-2t \\ z=2 \end{cases}$

d) Encontrar la posición relativa entre las rectas r y s de los apartados anteriores:

r: $\begin{cases} x=3-2t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x=1 \\ y=1-2t \\ z=2 \end{cases}$ $\quad Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds})=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}=2$

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-2,1,1)$ $\quad Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds},\overrightarrow{PQ})=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=3$

Por tanto las rectas r y s SE CRUZAN.

e) Hallar un punto D de la recta r que esté a la misma distancia de los puntos B y C.

Un punto genérico de la recta r es el (3-2t, -t, 1), calculamos los vectores $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{BD}=(2-2t,-1-t,-1)$
$\overrightarrow{BC}=(2-2t,1-t,-1)$ Como están a la misma distancia, el modulo de los dos vectores serán iguales.

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BD}\right\| \rightarrow \sqrt{4+4t^2-8t+1+t^2+2t+1}=\sqrt{4+4t^2-8t+1-2t+t^2+1}$$

$$4+4t^2-8t+1+t^2+2t+1=4+4t^2-8t+1-2t+t^2+1 \rightarrow t=0$$

Por tanto el punto buscado es el (3,0,1)

15.- Considera el triángulo que tiene por vértices los puntos A(1,1,2), B(1,0,-1) y C(1,-3,2)

a) Razonar si es rectángulo:

El triángulo es rectángulo si alguno de estas parejas de vectores es ortogonal:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(0,-1,-3),\overrightarrow{AC}=(0,-4,0)\\ \overrightarrow{BA}=(0,1,3),\overrightarrow{BC}=(0,-3,3)\\ \overrightarrow{CA}=(0,4,0),\overrightarrow{CB}=(0,3,-3)\end{cases} \rightarrow \begin{matrix}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(0,-1,-3)\cdot(0,-4,0)=4\\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(0,1,3)\cdot(0,-3,3)=6\\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(0,4,0)\cdot(0,3,-3)=12\end{matrix}$$

b) ***Calcular la recta r que pasa por B y es perpendicular al lado AC.***

Calculamos las ecuaciones paramétricas de la recta AC. $r:\begin{cases}x=1\\ y=1-4t\\ z=2\end{cases}$, un punto genérico de la recta es el $G\ (1,1-4t,2)$. Si calculamos el vector que une el punto genérico y el punto B:

$\overrightarrow{GB}=B-G=(0,4t-1,-3)$, este vector y el vector de la recta son perpendiculares, por tanto:

$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{dr}=(0,4t-1,-3)\cdot(0,-4,0)=0 \rightarrow -16t+4=0 \rightarrow t=\dfrac{1}{4}$

Por tanto el vector $\overrightarrow{GB}=(0,0,-3)$

Y la ecuación de la recta que pasa por B y es perpendicular a AC, es: $r:\begin{cases}x=1\\ y=0\\ z=-1-3t\end{cases}$

c) Calcular la recta S que pasa por los puntos A y C:

$$s:\begin{cases}x=1\\ y=1-4\lambda\\ z=2\end{cases}$$

a) D es el punto de corte de r y s, calcular el módulo de $\overrightarrow{BD}$

Como ambas rectas están en paramétricas, igualamos las paramétricas para obtener el punto de corte entre ellas. $\begin{cases}1=1\\ 0=1-4\lambda\\ 2=-1-3t\end{cases} \rightarrow \lambda=\dfrac{1}{4};t=-1$ → El punto de corte es el (1,0,2)

$\overrightarrow{BD} = D - B = (1,0,2) - (1,0,-1) = (0,0,3) \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{BD}\right\| = \sqrt{9} = 3$

b) Calcular la longitud del lado AC:

La longitud del lado AC es el módulo del vector $\overrightarrow{AC}$; $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{16} = 4$

c) Calcular el producto vectorial de los vectores AC y AB y comprueba que su módulo es igual a h·b, siendo h el módulo del vector BD y b la longitud del lado AC (calculados anteriormente)

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (12,0,0) \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 12 ; \quad h\cdot b = 4\cdot 3 = 12$$

16.- Consideramos los puntos A(2,1,2) y B(0,4,1) y la recta r: $x = y - 2 = \dfrac{z-3}{2}$

a) Determinar un punto C de la recta que equidiste de los puntos A y B

Escribimos r en forma paramétrica: $r: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$, un punto genérico de ella es el G(t,2+t,3+2t).

Si calculamos los vectores $\overrightarrow{AG}$ y $\overrightarrow{BG}$, como los puntos A y B están a la misma distancia, el módulo de estos vectores ha de ser el mismo.

$$\overrightarrow{AG} = G - A = (t,2+t,3+2t) - (2,1,2) = (t-2,1+t,1+2t)$$
$$\overrightarrow{BG} = G - B = (t,2+t,3+2t) - (0,4,1) = (t,t-2,2+2t)$$

$$\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \left\|\overrightarrow{BG}\right\|$$
$$\sqrt{(t-2)^2 + (1+t)^2 + (1+2t)^2} = \sqrt{t^2 + (t-2)^2 + (1+2t)^2}$$
$$(t-2)^2 + (1+t)^2 + (1+2t)^2 = t^2 + (t-2)^2 + (1+2t)^2$$
$$t^2 + 4 - 4t + 1 + t^2 + 2t + 1 + 4t^2 + 4t = t^2 + t^2 + 4 - 4t + 1 + 4t^2 + 4t$$

De donde:

$$6t^2 - 2t + 6 = 6t^2 - 3t + 5 \qquad \boxed{t = -1}$$

Por tanto el punto que está a la misma distancia de A y B es el (-1,1,1)

b) Calcular el área del triángulo ABC

El área del triángulo ABC se calcula como:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|(-3,1,9)\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{9+1+81} = \frac{1}{2}\sqrt{91} = \frac{\sqrt{91}}{2}$$