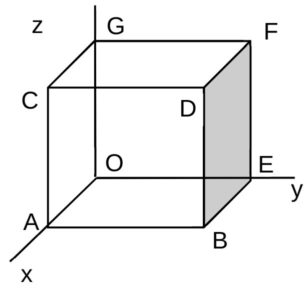
VECTORES. OPERACIONES:

1. Comprobar si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, siendo A(2,1,3), B(5,4,1), C(2,1,5) y D(3,2,−1). En caso negativo, hallar las coordenadas del punto D' para que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD'}$ sean equipolentes.
(Soluc: no son equipolentes; D'(5,4,3))



2. Considerar el cubo de arista unidad de la figura. Indicar las coordenadas de dos vectores equipolentes a $\overrightarrow{AB}$ y otro equipolente a $\overrightarrow{AD}$. Hallar $|\overrightarrow{AE}|$ y $|\overrightarrow{AF}|$

3. *(**S**)* Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=10\sqrt{3}$ y $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. *(Soluc: 90^0)*

4. Dados $\vec{u}=(1,4,3)$ y $\vec{v}=(2,3,2)$, dibujarlos sobre los mismos ejes, y hallar, gráfica y analíticamente: $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $2\vec{u}$, $3\vec{v}$ y $2\vec{u}+3\vec{v}$

5. Dados $\vec{u}=(5,2,15), \vec{v}=(-1,2,1), \vec{w}=(2,-1,3)$, se pide:

a) Expresar $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ *(Soluc: $\vec{u}=3\vec{v}+4\vec{w}$)*

b) Expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *(Soluc: $\vec{w}=\frac{1}{4}\vec{u}-\frac{3}{4}\vec{v}$)*

c) ¿Son linealmente dependientes o independientes $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$?

d) ¿Cuál es el rango de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$?

e) Volver a hacer el apartado **c** por determinantes.

6. **a)** Hallar el valor de k para que $\vec{u}=(1,2,-1), \vec{v}=(0,1,2), \vec{w}=(-1,k,3)$ sean linealmente dependientes.
(Soluc: k=-1)

b) Obtener, en ese caso, una relación de dependencia entre $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ *(Soluc: $\vec{u}=\vec{v}-\vec{w}$)*

7. Considerar los vectores $\vec{a}=(3,1,0)$, $\vec{b}=(1,4,0)$, $\vec{c}=(0,5,3)$

a) Razonar que forman una base de V^3

b) Hallar las coordenadas de $\vec{x}=(7,0,3)$ en la base anterior. *(Soluc: $\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$)*

c) Intentar dibujar la situación anterior.

8. Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,0,0) y B(0,1,0). Las coordenadas del centro M son M(0,0,1). Hallar las coordenadas de los vértices C y D. Dibujar la situación. *(Soluc: C(0,−1,2) y D(−1,0,2))*

9. *(**S**)* Dados los puntos A(2,3,9) y B(1,−2,6), hallar tres puntos P, Q y R que dividen al segmento AB en cuatro partes iguales. *(Soluc: P(7/4,7/4,33/4), Q(3/2,1/2,15/2), R(5/4,−3/4,27/4))*

PRODUCTO ESCALAR:

10. Dados A(1,2,3) y B(2,1,4), se pide:

a) Dibujar $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$

b) Hallar d(A,B) *(Soluc: √3 u)*

c) Hallar el ángulo entre $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ *(Soluc: ≅21º 4' 14")*

d) Hallar m tal que (0,3,m) sea ⊥ a $\vec{OB}$ *(Soluc: m=−3/4)*

11. Sean $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ los vectores de la base ortonormal canónica de V^3. Hallar:

a) $\vec{i}\cdot\vec{i}$ **b)** $\vec{i}\cdot\vec{j}$ **c)** $\vec{i}\cdot\vec{k}$ **d)** $\vec{j}\cdot\vec{j}$ **e)** $\vec{j}\cdot\vec{k}$ **f)** $\vec{k}\cdot\vec{k}$ *(Soluc: 1; 0; 0; 1; 0; 1)*

12. *(**S**)* Calcular los valores de **x** e **y** para que el vector (x,y,1) sea ortogonal a los vectores (3,2,0) y (2,1,−1)

(Soluc: x=2, y=−3)

13. Considérese un triángulo equilátero ABC de lado 6 u. Hallar $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$, $\vec{AB}\cdot\vec{BC}$ y $\vec{BC}\cdot\vec{AC}$

(Soluc: 18, −18, 18)

14. Desarrollar las siguientes expresiones: **a)** $(\vec{u}-\vec{v})^2$ **b)** $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ **c)** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

15. Inventar tres vectores cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$, y comprobar que se verifica la propiedad distributiva:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

16. Demostrar que el vector $\vec{a}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}-(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}$ es ortogonal al vector $\vec{b}$

17. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $(\vec{u}+\vec{v})^2=25$ y $(\vec{u}-\vec{v})^2=9$. Calcular el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ *(Soluc: 4)*

18. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=9$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=17$. Calcular el módulo del vector $\vec{v}$

(Soluc: 8)

19. Obtener tres vectores cualesquiera ⊥ a $\vec{u}=(3,-1,5)$ ¿Cuál es su expresión general?

(Soluc: (a,b,c) tal que 3a−b+5c=0)

20. Dados $\vec{u}=(3,-1,5)$ y $\vec{v}=(3,0,3)$, se pide:

a) Obtener un vector cualquiera ⊥ a ambos. *(Soluc: p. ej. (-1,2,1))*

b) Obtener un vector cualquiera ⊥ a ambos y unitario. *(Soluc: (-√6/6, √6/3, √6/6); también vale el opuesto)*

c) Obtener un vector cualquiera ⊥ a ambos y de módulo 3 *(Soluc: (-√6/2, √6, √6/2); también vale el opuesto)*

21. Encontrar los vectores unitarios de IR^3 que son perpendiculares a $\vec{v}=(1,0,1)$ y forman un ángulo de 60º con $\vec{w}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$ *(Soluc: (1/2, √2/2, -1/2) y (-1/2, √2/2, 1/2))*

PRODUCTO VECTORIAL:

22. Dados los puntos del ejercicio 10, hallar $\vec{OA} \times \vec{OB}$. Obtener también el ángulo entre $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ por producto vectorial, y comprobar que se obtiene el mismo resultado que por producto escalar.

23. Dados los vectores $\vec{u} = (2,-1,1)$ y $\vec{v} = (1,-2,-1)$, se pide:

a) Ángulo que forman. *(Soluc: 60º)*

b) Un vector perpendicular a ambos. $\left(\textit{Soluc: } \vec{u} \times \vec{v} = (3,3,-3) \right)$

c) Hallar el valor de **m** para que el vector $\vec{w} = (2,m,-4)$ sea $\perp$ a $\vec{v}$

24. Inventar tres vectores cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$, y comprobar que el producto vectorial: **a)** Verifica la propiedad anticonmutativa. **b)** No verifica la asociativa. **c)** Sí verifica la asociativa mixta, y la distributiva respecto a la suma.

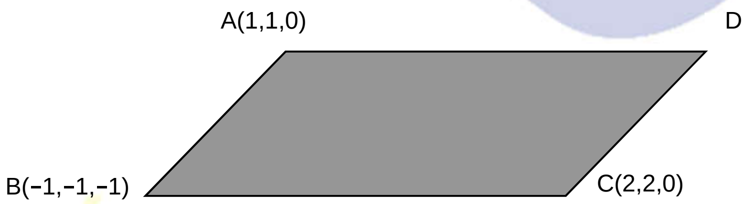
25. Dibujar el triángulo de vértices A(1,3,5), B(2,7,8) y C(5,1,−11) y calcular su área. *(Soluc: $\sqrt{1118}\ u^2$)*

26. Comprobar analíticamente que $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$. ¿Qué consecuencia tiene este hecho? Obtener también $\left(\vec{i} \times \vec{j}\right) \times \vec{k}$, $\vec{i} \times \left(\vec{j} \times \vec{k}\right)$, $\left(\vec{i} \times \vec{i}\right) \times \vec{j}$ e $\left(\vec{i} \times \vec{j}\right) \times \left(\vec{k} \times \vec{i}\right)$

27. Hacer de nuevo el ejercicio 20 por producto vectorial.

28. Hallar los dos vectores unitarios ortogonales a (2,−2,3) y (3,−3,2). *(Soluc: ($\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$,0) y (−$\sqrt{2}/2$,−$\sqrt{2}/2$,0))*

29. *(**S**)* Considérese la figura siguiente:



Se pide: **a)** Coordenadas de D para que ABCD sea un paralelogramo. *(Soluc: D(4,4,1))*

b) Área de este paralelogramo. *(Soluc: $S_{ABCD}=\sqrt{2}\ u^2$)*

30. *(**S**)* Explicar cómo puede hallarse el área de un triángulo a partir de las coordenadas de sus tres vértices (en el espacio). Aplicarlo a A(1,0,1), B(−1,0,0), C(0,2,3). *(Soluc: $3\sqrt{5}/2\ u^2$)*

31. Dados $\vec{u} = (-1,2,1)$ y $\vec{v} = (1,1,0)$

a) Hallar **a** y **b** para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean $\perp$ a $\vec{w} = (a,2,b)$ *(Soluc: a=−2, b=−6)*

b) Hallar el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *(Soluc: ≅73º 13' 17'')*

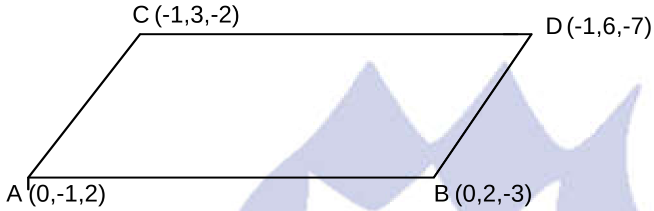
c) Hallar un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{x} = (-1,1,0)$ y unitario. *(Sol: (−$\sqrt{3}/3$,−$\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}/3$); también vale el opuesto)*

32. Considerar el triángulo de vértices A(1,0,2), B(2,2,2) y C(3,−1,2)

a) Hallar su área. *(Soluc: 5/2 u^2)*

b) Hallar el ángulo correspondiente al vértice A *(Soluc: 90º)*

33. **a)** Demostrar (por equipolencia de vectores) que los siguientes puntos forman un paralelogramo en el espacio:



b) Hallar el área del triángulo ABC *(Soluc: ($\sqrt{98}/2\ u^2$)*

PRODUCTO MIXTO:

34. Comprobar con los vectores $\vec{u}=(3,2,4)$, $\vec{v}=(2,1,-3)$ y $\vec{w}=(-2,-4,0)$ que la definición del producto mixto y la expresión analítica coinciden.

35. Dibujar el tetraedro de vértices A(2,1,0), B(0,1,0), C(3,3,7) y D(0,0,0) y hallar su volumen. *(Soluc: 7/3 u^3)*

36. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son A(2,1,4), B(1,0,2), C(4,3,2) y D(1,5,6) *(Soluc: 5 u^3)*

37. Dados los puntos A(1,−2,0), B(−2,4,4) y C(3,−1,−1), se pide:

a) Hallar un vector $\perp$ a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ *(Soluc: (2,−1,3))*

b) Hallar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ *(Soluc: ≅102º 4' 7")*

c) Hallar el área del triángulo determinado por los tres puntos anteriores. *(Soluc: $5\sqrt{14}/2\,u^2$)*

d) Hallar el volumen del tetraedro de vértices los tres puntos anteriores y el origen. *(Soluc: 10/3 u^3)*

38. Dados $\vec{u}=(a,2,3)$, $\vec{v}=(3,2,a)$ y $\vec{w}=(a,-2,1)$, se pide:

a) Hallar **a** para que $\vec{w}$ sea $\perp$ a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *(Soluc: a=1)*

b) Hallar **a** para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean coplanarios. *(Soluc: a=−2, a=3)*

39. Hallar $[\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$ e interpretar gráficamente el resultado obtenido. *(Soluc: 1)*

40. **<u>TEORÍA</u>:** **a)** Demostrar que si $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, también lo son los vectores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{w}$ y $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$

b) Justificar que cualquier conjunto de vectores que contenga el vector nulo es L.D.

c) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$?

d) Justificar por qué el producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$ es siempre nulo.

e) Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$, ¿podemos concluir que $\vec{v}=\vec{w}$? ¿Y si es $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w}$?

f) Si $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=||\vec{u}||\cdot||\vec{w}||$, qué podemos concluir del ángulo que forman?

g) Sean $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indicar razonadamente cuáles de los siguientes productos mixtos valen cero:

$$\left[\vec{a}+\vec{c},\vec{a}-\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right] \qquad \left[\vec{a}+\vec{c},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right] \qquad \left[\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a}\right]$$