

1. Estudiar y clasificar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

3) $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 - 4}$

4) $f(x) = \frac{x - 1}{x^3 - x^2 + 3x}$

5) $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x}$

6) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 2}$

7) $f(x) = \frac{3x^2 - 9}{x - \sqrt{3}}$

8) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

9) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}$

10) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & x < 2 \\ x - 1 & x > 2 \end{cases}$

11) $f(x) = \begin{cases} -5x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

12) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases}$

13) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x < 2 \\ x & x \geq 2 \end{cases}$

14) $f(x) = \begin{cases} x & x < 3 \\ 2x + 1 & 3 \leq x < 5 \\ 4 & x \geq 5 \end{cases}$

15) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ -2 - x & x > -1 \end{cases}$

16) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 1 + x & x > 0 \end{cases}$

17) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \leq 3 \\ 1 - x^2 & x > 3 \end{cases}$

18) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 3x & x > 1 \end{cases}$

19) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x < 1 \\ 3x & x \geq 1 \end{cases}$

20) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & x \neq 2 \\ -4 & x = 2 \end{cases}$

21) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-5} & x \neq 5 \\ 7 & x = 5 \end{cases}$

22) $f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2} & x < -2 \\ \frac{1}{x} & -2 < x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$

23) $f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x-2} & x < -1 \\ \frac{6}{x-1} & -1 < x < 3 \\ \frac{6x}{x+3} & x > 3 \end{cases}$

24) $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & x < -2 \\ \frac{1}{x} & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & x > 2 \end{cases}$

25) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 1} & x \neq -1 \\ \frac{3}{4} & x = -1 \end{cases}$

26) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} & x \neq 2 \\ \frac{3}{4} & x = 2 \end{cases}$

27) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{\sqrt{\frac{x}{3}} - 1} & x \neq 3 \\ 1 & x = 3 \end{cases}$

28) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & x < \frac{5}{2} \\ 0 & x = \frac{5}{2} \\ x - \frac{11}{4} & x > \frac{5}{2} \end{cases}$

29) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

30) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

31) $f(x) = E(x)$

32) $f(x) = \text{Mant}(x) = x - E(x)$

33) $f(x) = x \cdot E(x)$

34) $f(x) = (-1)^{E(x)}$

2. Calcular k y t para que las siguientes funciones sean continuas en los puntos que se indican:

39) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ k & x = 3 \end{cases}$ en $x = 3$

40) $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^4 - 3x^3}{7x^5 + kx^3} & x \neq 0 \\ \frac{2}{5} & x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

41) $f(x) = \begin{cases} \frac{kx^4 - 3x^3}{7x^5 + 3x^3} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

42) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{kx}}{x + 2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2kx + k & \text{si } x > 0 \end{cases}$

en $x = 0$

43) $f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{si } x < 0 \\ x + 2k & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -x + t & \text{si } 2 < x \end{cases}$

en todo \mathbb{R}

44) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < -1 \\ x + 2k & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -x + t & \text{si } 1 < x \end{cases}$

en todo \mathbb{R}

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{-5x - 2x^3}$ (Sol: $-1/2$)
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ (Sol: 0)
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 8}{2x^2 - 5}$ (Sol: $1/2$)
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{\sqrt{x^6 + 1}}$ (Sol: 0)
- 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{x - 1}$ (No existe)
- 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}$ (Sol: -2)
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ (Sol: 1)
- 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4})$ (Sol: 0)
- 9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{7+x} - 3}$ (Sol: 24)
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x - \sqrt{16x^2 - 3x})$ (Sol: $+\infty$)
- 11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 - 2x}$ (Sol: 2)
- 12) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}$ (Sol: $13/7$)
- 13) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$ (Sol: 8)
- 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2} - \frac{x^4 + x + 1}{x^3 + x} \right)$ (Sol: 0)
- 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$ (Sol: $1/4$)
- 16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x}{\sqrt{1+x^2}}$ (Sol: 2)
- 17) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4}$ (Sol: $\sqrt{2}/16$)
- 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1-x} - 1}$ (Sol: -10)
- 19) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$ (Sol: $1/6$)
- 20) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - ax}{x^2 + ax - 2a^2}$ (Sol: $1/3$)
- 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{2 - \sqrt{x+4}}$ (Sol: -4)
- 22) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^3 + x - 3}$ (Sol: -7)
- 23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3))$ (Sol: 3)
- 24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 2} - \sqrt{4x^2 - 5x + 2})$ (Sol: $9/4$)
- 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1-x} - 1}$ (Sol: -10)
- 26) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 3x}{1 - 3x^3}$ (Sol: $+\infty$)
- 27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$ (Sol: $\sqrt{2} - 1$)
- 28) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{-27x^2 + 1}{2 + x^2}}$ (Sol: -3)
- 29) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$ (Sol: $1/4$)
- 30) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 5})$ (Sol: 0)
- 31) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x)$ (Sol: -1)
- 32) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x - 3}{5x + 3} \right)^{\frac{-x^2 + 3}{2x}}$ (Sol: 0)
- 33) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+16} - 4}$ (Sol: $4/3$)
- 34) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-3}{2x-5} \right)^{\frac{x^2+1}{x^2-4x+4}}$ (Sol: $4/9$)
- 35) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{3x-1} \right)^{\frac{4x+1}{x}}$ (Sol: $16/81$)
- 36) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{\frac{3x^2}{x-1}}$ (Sol: e^6)
- 37) $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{3}{x-2}}$ (Sol: e^3)
- 38) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3+1}{x^2+1} \right)^{\frac{3}{x-1}}$ (Sol: $e^{3/2}$)
- 39) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x-2}{4x+3} \right)^{2x}$ (Sol: e^{-2})
- 40) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3x}{2x^2-5} \right)^{2x+1}$ (Sol: e^3)
- 41) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-8} \right)^{\frac{x^2}{2}}$ (Sol: $e^{9/2}$)
- 42) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+7}{4x-5} \right)^{\frac{x^2}{x-1}}$ (Sol: e^3)

1.- Calcula los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 6}{5x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \text{Sen}(x - a)$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \text{Cos } 3x$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16 + x}}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\frac{25 - (x + 1)^2}{5 + (x + 1)}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{x + 4}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x - 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \text{Sen } 2x + \text{Cos } 2x$

Sol: a) 4/9; b) $\sqrt{5}$; c) $\text{Cos } a$ d)-1; e)-1/8; f) 0; g) 2; h) 0; i)-1

2.- Calcula los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{-5x - 2x^3}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{7 + x} - 3}$

p) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1 - x} - 1}$

q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x - \sqrt{16x^2 - 3x})$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 8}{2x^2 - 5}$

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

r) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{\sqrt{x^6 + 1}}$

l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}$

s) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - ax}{x^2 + ax - 2a^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{x - 1}$

m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$

t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{2 - \sqrt{x + 4}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}$

n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^3 + x - 3}$

u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2} - \frac{x^4 + x + 1}{x^3 + x} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

ñ) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3))$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4})$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x}{\sqrt{1 + x^2}}$

w) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 2} - \sqrt{4x^2 - 5x + 2})$

Sol: a)-1/2; b)0; c)1/2; d)0; e)No existe; f)-2; g)1; h)0; i)24; j)-10; k)2; l)13/7; m)8; n)-7; ñ)1/4; o)2; p) $\frac{\sqrt{2}}{16}$; q)+∞; r)1/6; s) 1/3; t) -4; u) 0; v)3; w) 9/4.

3.- Calcula los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1 - x} - 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x)$

m) $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)^{\frac{3}{x-2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 3x}{1 - 3x^3}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x - 3}{5x + 3} \right)^{\frac{-x^2 + 3}{2x}}$

n) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{x-1}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 9} - 3}{\sqrt{x + 16} - 4}$

ñ) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x - 2}{4x + 3} \right)^{2x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{-27x^2 + 1}{2 + x^2}}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x - 3}{2x - 5} \right)^{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 4}}$

o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{2x^2 - 5} \right)^{2x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{3x - 1} \right)^{\frac{4x + 1}{x}}$

p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 8} \right)^{\frac{x^2}{2}}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 5})$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x - 1} \right)^{\frac{3x^2}{x-1}}$

q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x + 7}{4x - 5} \right)^{\frac{x^2}{x-1}}$

Sol: a)-10; b) +∞; c) $\sqrt{2} - 1$; d)-3; e) 1/4; f) 0; g)-1; h) 0; i) 4/3; j) 4/9; k) 16/81; l) e^6 ; m) e^3 ; n) $e^{3/2}$; ñ) 9/49; o) e^3 ; p) $e^{9/2}$; q) e^3

4.- Determinar el valor de a para que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = 2$

Sol: a=4

5.- Demuestra que la siguiente ecuación tiene solución: $2 - x = \ln x$

6.- Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$, en el punto 0, en el punto 1 y en $+\infty$

Sol: a) 1/; b) 1-cos1; c) 0

7.- Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^x$

Sol: e^2

8.- Calcular el valor de la constante c para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{cx} = e$

Sol: c=1/3

9.- Estudiar en el cuerpo real la continuidad de la función definida por: $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Sol: Así que la función f(x) es una función continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, donde presenta una discontinuidad de salto.

10.- Determinar a y b para que la función definida por $f(x) = \begin{cases} ae^{-x} + b \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ 3a \frac{\sin x}{x} + b(x-1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua.

Sol: No existen a y b, porque en x=0 no está definida.

11.- Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 7x - 8}$ en x=1, e indicar que tipo de discontinuidad presenta.

Sol: La función no está definida en x=1, por tanto no es continua, presenta una discontinuidad evitable.

12.- Halla los valores de a y b para que la función f sea continua: $f(x) = \begin{cases} -3 \sin x & \text{si } x \leq \frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Sol: a=-3/2; b=3/2

13.- La función $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} - 1$ cambia de signo en el intervalo [-1,1] y sin embargo no se anula en dicho intervalo. ¿Queda en entredicho el Teorema de Bolzano?

Sol: No.

14.- Demuestra que la función $f(x) = \frac{5}{2 + \cos x}$ toma el valor 4.

Sol: Por el Teorema de Valores intermedios en el intervalo (0, π)

15.- Calcular: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$

Sol: a/2

16.- Demuestra que un polinomio de grado impar, tiene por lo menos una raíz.

Sol: Utilizar el teorema de Bolzano.

17.- Representa la función $f(x) = 2|x+1| - |x-2|$

18.- Calcula los límites: a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x)^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^x$

Sol: a) $+\infty$; b) 0; c) 1; d)

19.- Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $|2x-3|=4$ b) $|x^2-2x|=1$

Sol: a) x=-1/2 y x=7/2; b) x=0; x=1; x=2