Cálculo de primitivas

1

Utilizaremos la notación $\int f(x)\,dx$ para denotar una primitiva de la función f. Además, abusando del lenguaje, a menudo hablaremos de “integral de la función” cuando deberíamos decir “primitiva de la función”.

Los métodos que vamos a comentar son sólo unos pocos y abarcan a la mayoría de las funciones usuales pero no debes olvidar que hay muchos más. Pero lo más importante es manejar con soltura las derivadas y las primitivas de las funciones elementales. En el Apéndice ?? puedes encontrar un par de tablas con algunas de las derivadas y primitivas usuales.

1.1 Cambio de variable

Mediante un cambio de variable es posible transformar la integral en otra más sencilla. Si hacemos $y = \phi(x)$, $dy = \phi'(x)\,dx$, se tiene

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy.$$

Para terminar sólo tenemos que deshacer el cambio.

Ejemplo 1.1. Calcular $\int \frac{e^x+3e^{2x}}{2+e^x}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+3e^{2x}}{2+e^x}\,dx &= \left[\begin{array}{c} y=e^x \\ dy = e^x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{y+3y^2}{2+y}\cdot\frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1+3y}{2+y}\,dy \\ &= \int \left(3 - \frac{5}{2+y}\right)dy \\ &= 3y - 5\log|y+2| = 3e^x - 5\log(e^x+2).\triangleleft\end{aligned}$$

1.2 Integración por partes

Si u y v son dos funciones, teniendo en cuenta que $(u\cdot v)' = u\cdot v' + v\cdot u'$, obtenemos que

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Esta fórmula aparece escrita en muchas ocasiones de la forma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

El teorema especifica con un poco más de rigurosidad las condiciones necesarias.

Teorema 1.2. *Sean $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones derivables con derivada continua. Entonces uv' y vu' son integrables en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Integración por partes

Ejemplo 1.3. Calcular $\int x\, e^x\, dx$.

$$\int x\, e^x\, dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x\, dx, & v = e^x \end{bmatrix} = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x = e^x(x-1).\triangleleft$$

Ejemplo 1.4. Calcular $\int \operatorname{sen}(x)\, e^x\, dx$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(x) e^x\, dx &= \begin{bmatrix} u = \operatorname{sen}(x), & du = \cos(x) \\ dv = e^x\, dx, & v = e^x \end{bmatrix} = \operatorname{sen}(x) e^x - \int \cos(x) e^x\, dx \\ &= \begin{bmatrix} u = \cos(x), & du = -\operatorname{sen}(x) \\ dv = e^x\, dx, & v = e^x \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{sen}(x) e^x - \cos(x) e^x - \int \operatorname{sen}(x) e^x\, dx,\end{aligned}$$

con lo que despejando tenemos $\int \operatorname{sen}(x) e^x\, dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x) e^x - \cos(x) e^x\right)$. $\triangleleft$

1.3 Integración de funciones racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, y queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, supondremos siempre que el grado de P es menor que el grado de Q.

1.3.1 Integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{(ax+b)^n}$

El cambio de variable $y = ax + b$ la transforma en una integral inmediata de la forma $\int \frac{P(y)}{y^n}\, dy$.

Ejemplo 1.5.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+5x+2}{(x-1)^3}\, dx = [y = x-1, dy = dx] &= \int \frac{3(y+1)^2 + 5(y+1) + 2}{y^3}\, dy \\ &= \int \frac{3y^2 + 11y + 10}{y^3}\, dy \\ &= 3\int \frac{dy}{y} + 11\int \frac{dy}{y^2} + 10\int \frac{dy}{y^3} \\ &= 3\log|x-1| - \frac{11}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2}.\triangleleft\end{aligned}$$

1.3.2 Integrales del tipo $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$, donde el denominador no tiene raíces reales

Siempre se puede escribir $x^2 + bx + c = (x-d)^2 + k^2$, con lo que descomponemos nuestra integral en dos:

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\, dx &= \int \frac{Mx+N}{(x-d)^2+k^2}\, dx = \int \frac{M(x-d)+N+Md}{(x-d)^2+k^2}\, dx \\ &= \int \frac{M(x-d)}{(x-d)^2+k^2}\, dx + \int \frac{N+Md}{(x-d)^2+k^2}\, dx \\ &= \frac{M}{2}\log\left|(x-d)^2+k^2\right| + (N+Md)\int \frac{dx}{(x-d)^2+k^2}\end{aligned}$$

y la última integral es inmediata (del tipo arcotangente) si hacemos el cambio de variable $y = \frac{x-d}{k}$.

Ejemplo 1.6. Calcular $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\, dx$.
Como $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$, hacemos el cambio $y = x + 1$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\, dx &= \int \frac{2(y-1)+3}{y^2+1}\, dy = \int \frac{2y}{y^2+1}\, dy + \int \frac{dy}{y^2+1} \\ &= \log(y^2+1) + \arctan(y) = \log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1). \triangleleft\end{aligned}$$

1.3.3 Raíces reales y/o complejas simples

En este caso

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)\dots(x^2+b_mx+c_m).$$

Lo que vamos a hacer es descomponer de nuevo en fracciones más sencillas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n} \\ &+ \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+b_2x+c_2} + \dots \frac{B_mx+C_m}{x^2+b_mx+c_m},\end{aligned}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, C_m$ son constantes a determinar. Para calcularlas desarrollamos e igualamos los coeficientes del mismo grado.

Observación 1.7. Si el polinomio $Q(x)$ sólo tiene raíces reales se pueden calcular las constantes A_1,...,A_n dando a la variable x los valores a_1,..., a_n.

Ejemplo 1.8. Cálculo de $\int \frac{1}{x^4-1}\, dx$:
Como $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, la descomposición nos quedaría:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Si desarrollamos e igualamos coeficientes:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}$$

$$1 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)$$

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=0 \\ A-B+D&=0 \\ A+B-C&=0 \\ A-B-D&=1 \end{aligned}\right\} \implies \left\{\begin{aligned} A&=1/4 \\ B&=-1/4 \\ C&=0 \\ D&=-1/2 \end{aligned}\right.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4-1} &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2}\arctan(x). \triangleleft\end{aligned}$$

1.3.4 Raíces reales múltiples

En este caso el denominador tiene la forma $Q(x) = (x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\dots(x-a_n)^{r_n}$, y podemos descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \cdots \frac{C_{r_n}}{(x-a_n)^{r_n}}$$

Cada una de estas fracciones pertenecen a alguno de los casos ya estudiados.

Ejemplo 1.9. Calcular $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}\,dx$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}\\ &= \frac{A(x+1)^3 + B(x-1)(x+1)^2 + C(x-1)(x+1) + D(x-1)}{(x-1)(x+1)^3}\\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}\end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0\\ 3A+B+C&=0\\ 3A-B+D&=0\\ A-B-C-D&=1\end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} A&=\tfrac{1}{8}\\ B&=-\tfrac{1}{8}\\ C&=-\tfrac{1}{4}\\ D&=-\tfrac{1}{2}.\end{aligned}\right.$$

La integral nos queda

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^3}\\ &= \frac{1}{8}\log|x-1| - \frac{1}{8}\log|x+1| + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}. \triangleleft\end{aligned}$$

1.3.5 Raíces reales y complejas múltiples. Método de Hermite

El método que vamos a estudiar, conocido como Método de Hermite, consiste en descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones más simples de una forma muy particular. Pasos a seguir:

Paso 1 Descomponemos el denominador, $Q(x)$, como producto de factores de grado 1 y factores de grado 2 irreducibles:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}.$$

Paso 2 Escribimos el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{M_mx+N_m}{x^2+b_mx+c_m} +\\ &+ \frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}\right)\end{aligned}$$

donde $A_1,\ldots,A_n,M_1,\ldots,M_m,N_1,\ldots,N_m$ son coeficientes que tenemos que determinar, y en la fracción que aparece con una derivada $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que el denominador. En resumen, se trata de escribir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples, una por cada factor, más la derivada de un cociente que tiene por denominador lo que queda de $Q(x)$.

¿Cómo determinamos todos los coeficientes? Basta efectuar la derivada, reducir todas las fracciones a común denominador (que será $Q(x)$), e igualar $P(x)$ al numerador resultante. Esto nos producirá un sistema de ecuaciones cuya resolución nos dará el valor de todos los coeficientes.

Paso 3 Una vez escrita la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la forma anterior, es fácil calcular su integral:

$$\begin{aligned}\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx &= \int\frac{A_1}{x-a_1}\,dx + \cdots + \int\frac{M_1x+N1}{x^2+b_1x+c_1}\,dx + \cdots\\ &+ \frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.10. Cálculo de $\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(x^2+9)^2} &= \frac{Mx+N}{x^2+9} + \frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{x^2+9}\right)\\ &= \frac{(Mx+N)(x^2+9)}{(x^2+9)^2} + \frac{a(x^2+9)-2x(ax+b)}{(x^2+9)^2}\\ &= \frac{Mx^3+(N-a)x^2+(9M-2b)x+(9a+9N)}{(x^2+9)^2}\end{aligned}$$

Igualando los numeradores coeficiente a coeficiente, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} M &= 0\\ -a+N &= 1\\ -2b+9M &= 0\\ 9a+9N &= 0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} M=0 & b=0\\ N=1/2 & a=-1/2\end{cases}$$

De esta forma se tiene

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+9} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+9},$$

y la última integral vale

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{1/9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

En resumen,

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{-x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x}{3}\right). \triangleleft$$

Ejemplo 1.11. Calcular $\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$.

$$\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}\right).$$

Realizando la derivada y reduciendo a común denominador, obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución es $a=0$, $b=5/2$, $c=0$, $d=1$, $A=5$, $M=-5$ y $N=0$; por lo tanto

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{(5/2)x^2+1}{x^2(x^2+1)} + 5\log(x) - \frac{5}{2}\log(x^2+1). \triangleleft$$

1.4 Integración de funciones trigonométricas

1.4.1 Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)$, $\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)$, $\int \cos(ax)\cos(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) &= \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)],\\ \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)],\\ \operatorname{sen}(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)].\end{aligned}$$

Ejemplo 1.12.

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x)\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos(x).\triangleleft$$

1.4.2 Integrales de la forma $\int \tan^n(x)$, $\int \operatorname{cotan}^n(x)$

Se reducen a una con grado inferior separando $\tan^2(x)$ o $\operatorname{cotan}^2(x)$ y sustituyéndolo por $\sec^2(x) - 1$ y $\operatorname{cosec}^2(x) - 1$.

Ejemplo 1.13. Calcular $\int \tan^5(x)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \tan^5(x)\,dx &= \int \tan^3(x)\tan^2(x)\,dx = \int \tan^3(x)\left(\sec^2(x) - 1\right)\,dx\\ &= \int \tan^3(x)\sec^2(x)\,dx - \int \tan^3(x)\,dx.\end{aligned}$$

Acabamos por separado cada integral:

$$\int \tan^3(x)\sec^2(x)\,dx = -\frac{1}{4}\tan^4(x)\,dx \quad \text{(utilizando el cambio } y = \tan(x))$$

$$\begin{aligned}\int \tan^3(x)\,dx &= \int \tan(x)\tan^2(x)\,dx = \int \tan(x)(\sec^2(x) - 1)\,dx\\ &= \int \tan(x)\sec^2(x)\,dx - \int \tan(x)\,dx = \frac{1}{2}\tan^2(x) + \log|\cos(x)|.\triangleleft\end{aligned}$$

1.4.3 Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)$, con n o m enteros impares

Se transforman en una integral racional con el cambio $y = \cos(x)$ (si m es impar) o $y = \operatorname{sen}(x)$ (si n es impar).

Ejemplo 1.14. Calcular $\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx &= \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2(x))\cos(x)\,dx}{\operatorname{sen}^2(x)} = \begin{bmatrix} y = \operatorname{sen}(x) \\ dy = \cos(x)\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{1 - y^2}{y^2}\,dy\\ &= -\frac{1}{y} - y = \frac{-1}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x).\triangleleft\end{aligned}$$

1.4.4 Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)$, con n y m enteros pares

Se resuelven usando las identidades $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, y $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$.

Ejemplo 1.15. Calcular $\int \cos^2(x)\,dx$.

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}.\triangleleft$$

1.4.5 Integrales de la forma $\int R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$, R una función racional par.

Diremos que R es una función racional par si $R(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = R(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x))$. Se resuelven utilizando el cambio $y = \tan(x)$

Ejemplo 1.16. Calcular $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)} &= \left[\begin{array}{c} y = \tan(x) \\ dy = \sec^2 x\, dx \end{array}\right] = \int \frac{(1+y^2)^3}{y^3}\, dy \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{cotan}^2(x) + 3\log|\tan(x)| + \frac{3}{2}\tan^2(x) + \frac{1}{4}\tan^4(x)\,.\triangleleft\end{aligned}$$

1.4.6 Integrales de la forma $\int R\left(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\right)$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. En general, se hace el cambio de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, con lo que $\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, y $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$. Con este cambio convertimos la integral en la integral de una función racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 1.17. Calcular $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\tan(x)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\tan(x)} &= \int \frac{\cos(x)\,dx}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} = \left[\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t\right] = \cdots = \int \frac{t^2-1}{2t^3}\,dt \\ &= \frac{1}{4t^2} + \frac{\log|t|}{2} = \frac{1}{4\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\,.\triangleleft\end{aligned}$$

1.5 Integración de funciones hiperbólicas

1.5.1 Integrales de la forma $\int R\left(\operatorname{senh}(x), \cosh(x)\right)$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$. En general, se hace el cambio de variable $e^x = t$, con lo que la integral en una racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 1.18. Calcular $\int \frac{dx}{1+2\operatorname{senh}(x)+3\cosh(x)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+2\operatorname{senh}(x)+3\cosh(x)} &= \int \frac{dx}{1+\frac{5}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}} = \left[\begin{array}{c} e^x = t \\ dx = dt/t \end{array}\right] \\ &= 2\int \frac{dt}{5t^2+2t+1} \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{5t+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-5t-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{5e^x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-5e^x-1}{2}\right).\triangleleft\end{aligned}$$

En algunos casos, utilizar un método similar al que usamos para calcular primitivas de funciones trigonométricas puede simplificar los cálculos. El siguiente método es un ejemplo de ello.

1.5.2 Integrales de la forma $\int \operatorname{senh}(ax)\cosh(bx)$, $\int \operatorname{senh}(ax)\operatorname{senh}(bx)$ o $\int \cosh(ax)\cosh(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y) &= \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y) - \operatorname{senh}(x-y)\right)\\
\cosh(x)\cosh(y) &= \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y) + \operatorname{senh}(x-y)\right)\\
\operatorname{senh}(x)\cosh(y) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{senh}(x+y) + \operatorname{senh}(x-y)\right).
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.19.

$$\int \operatorname{senh}(3x)\cosh(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{senh}(4x)\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{senh}(2x)\,dx = -\frac{1}{8}\cosh(4x) - \frac{1}{4}\cosh(2x). \triangleleft$$

1.6 Integración de funciones irracionales

1.6.1 Integrales de la forma $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$

Se resuelven utilizando el cambio de variable $y^q = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde q es el mínimo común múltiplo de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Ejemplo 1.20. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
Haciendo el cambio $x = y^6$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6y^5}{y^3+y^2}\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy\\
&= 2y^3 - 3y^2 + y - \log|y+1| = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - \log\left|\sqrt[6]{x}+1\right|. \triangleleft
\end{aligned}$$

1.6.2 Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$

Se transforman en una integral trigonométrica con el cambio $x = a\operatorname{sen}(t)$ o $x = a\cos(t)$. También se puede realizar el cambio $x = a\tanh(t)$ y se transforma en una integral hiperbólica.

Ejemplo 1.21. Cálculo de $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$:
Hacemos el cambio $x = 2\operatorname{sen}(t)$, con lo que $dx = 2\cos(t)dt$ y $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(t)} = 2\cos(t)$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{(2\cos(t))(2\cos(t))}{4\operatorname{sen}^2(t)}\,dt = \int \operatorname{cotan}^2(t)\,dt\\
&= \int (\operatorname{cosec}^2(t) - 1)\,dt = -\operatorname{cotan}(t) - t
\end{aligned}$$

usando que $\operatorname{cotan}(t) = \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$, se tiene que

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right). \triangleleft$$

1.6.3 Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$

Se transforman en una integral trigonométrica usando el cambio $x = a\tan(t)$. También se pueden resolver utilizando el cambio $x = a\ \mathrm{senh}(t)$.

Ejemplo 1.22. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.
Hacemos el cambio $x = \tan(t)$, $dx = \sec^2(t)dt$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2(t)}{\tan(t)\sec(t)}\,dt = \int \frac{dt}{\mathrm{sen}(t)} = -\log\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| + \log\left|\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|. \triangleleft$$

Ejemplo 1.23. Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.
Hacemos el cambio $x = \mathrm{senh}(t)$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \mathrm{senh}^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int (\cosh(2t)-1)\,dt = \frac{1}{4}\mathrm{senh}(2t) - \frac{t}{2}. \triangleleft$$

1.6.4 Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$

Se resuelven utilizando los cambios $x = a\sec(t)$ o $x = a\cosh(t)$.

Ejemplo 1.24. Calcular $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$.

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \tan(t)\frac{\mathrm{sen}(t)}{\cos^2(t)}\,dt = \int \frac{\mathrm{sen}^2(t)}{\cos^3(t)}\,dt,$$

que se resuelve aplicando los métodos ya vistos. También podríamos haber utilizado el cambio $x = \cosh(t)$ y, en ese caso, se tiene que

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \mathrm{senh}^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt = \ldots = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\mathrm{arccosh}(x)}{2}. \triangleleft$$

1.6.5 Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Se reducen a uno de los casos anteriores completando cuadrados, esto es, escribiendo $ax^2 + bx + c$ de la forma $a(x+\alpha)^2 + \beta$.

Ejemplo 1.25. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$.
Transformamos el integrando:

$$8x - x^2 = -(x^2-8x+16)+16 = -(x-4)^2+16 = 16\left(1-\left(\frac{x-4}{4}\right)^2\right)$$

y hacemos el cambio de variable $y = (x-4)/4$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16\left(1-\left(\frac{x-4}{4}\right)^2\right)}} = \begin{bmatrix} y = (x-4)/4 \\ dy = dx/4 \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{4dy}{4\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \mathrm{arcsen}(y) = \mathrm{arcsen}\left(\frac{x-4}{4}\right). \triangleleft$$

1.7 Aplicaciones de la integral

1.8 Cálculo de áreas

El área entre dos funciones $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se define como

$$\text{Área} = \int_a^b \mid f(x) - g(x) \mid \, dx.$$

Hasta ahora no hemos visto ningún metodo que nos permita calcular primitivas en las que aparecen valores absolutos. Por eso, antes de comenzar a integrar, es necesario estudiar cuánto vale $\mid f - g \mid$ o, dicho de otra forma, averiguar cuál de las dos funciones es la mayor.

Ejemplo 1.26.

undefined

Calcular el área entre la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX en el intervalo $[0,3]$.
Dividimos en intervalos donde sepamos el signo de la función e integramos:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \mid f(x) \mid \, dx &= \int_0^1 \mid f(x) \mid \, dx + \int_1^2 \mid f(x) \mid \, dx + \int_2^3 \mid f(x) \mid \, dx \\ &= \int_0^1 x(x-1)(x-2)\, dx - \int_1^2 x(x-1)(x-2)\, dx \\ &\quad + \int_2^3 x(x-1)(x-2)\, dx \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{15} + \frac{19}{30} = \frac{3}{4}. \triangleleft\end{aligned}$$

1.9 Longitudes de curvas

Sea f una función derivable con derivada continua en el intervalo $[a,b]$. La longitud del arco de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{longitud} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Ejemplo 1.27. Calcular la longitud de una circunferencia de radio 1.
La ecuación de una circunferencia de radio 1 es $x^2 + y^2 = 1$. Podemos despejar y en la parte positiva: $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ con $x \in [-1,1]$. Así, la longitud de *media* circunferencia será:

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \cdots = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\operatorname{arcsen}(x)\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \triangleleft$$

1.10 Área de sólidos de revolución

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua en $[a,b]$. Entonces el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = f(x)$ en $[a,b]$ es

$$\text{Superficie} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Ejemplo 1.28. Calcular la superficie de una esfera de radio 1.
Podemos generar una esfera girando respecto del eje OX la curva del ejemplo anterior

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad x \in [-1,1]$$

De esta forma, la superficie será:

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \cdots = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-1}^{1} dx = 2\pi \cdot 2 = 4\pi. \triangleleft$$

1.11 Volúmenes de sólidos de revolución

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. El volumen del sólido generado al girar el área bajo la curva $y = f(x)$ respecto del eje OX es

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$

y el volumen del sólido generado al girar dicha área respecto al eje OY es

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$$

En este segundo caso, la función f tiene que ser positiva.

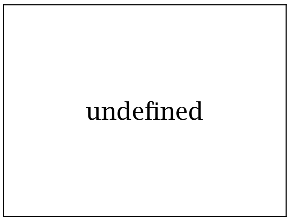

Figura 1.1 Volumen al girar respecto al eje OX

Ejemplo 1.29. Calcular el volumen de una esfera de radio 1.
Podemos generar una esfera rotando respecto del eje OX el área bajo la curva $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad x \in [-1,1]$ Con ello, el volumen será

$$\begin{aligned} V =& \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \\ =& \pi \left((1-\frac{1}{3}) - (-1+\frac{1}{3}) \right) = \frac{4\pi}{3}. \triangleleft \end{aligned}$$