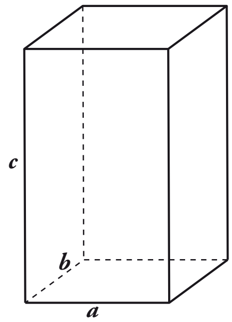
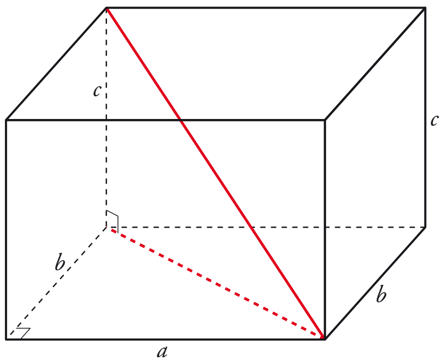
Resuelve

Página 123

Diagonal de un ortoedro y volumen de un paralelepípedo

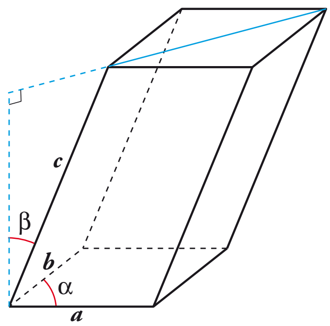
1. Expresa la diagonal de un ortoedro en función de sus dimensiones, *a*, *b* y *c*.





Diagonal = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2. Calcula el volumen de este paralelepípedo en función de sus dimensiones *a*, *b* y *c* y de los ángulos α y β.



Volumen = $a\ b\ c\ sen\ \alpha\ cos\ \beta$

1 Operaciones con vectores

Página 126

1 La propiedad $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (ab) \cdot \vec{v}$ relaciona el producto de números por vectores con el producto entre números.

a) De los cuatro productos que aparecen, ¿cuáles son del primer tipo y cuáles del segundo?

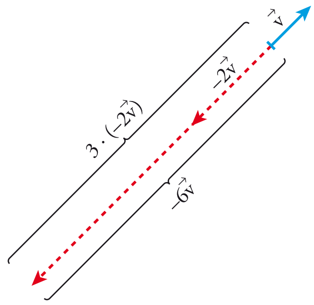
b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = -2$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Producto de números por vectores:

$b \cdot \vec{v}$; $(a \cdot b) \cdot \vec{v}$; $a \cdot (b \cdot \vec{v})$

Producto entre números: $a \cdot b$

b) $\left.\begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v} \end{array}\right\} \; 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$



2 La propiedad distributiva $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$ relaciona la suma de números con la suma de vectores.

a) De las dos sumas que aparecen, determina cuál es de cada tipo.

b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = 5$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

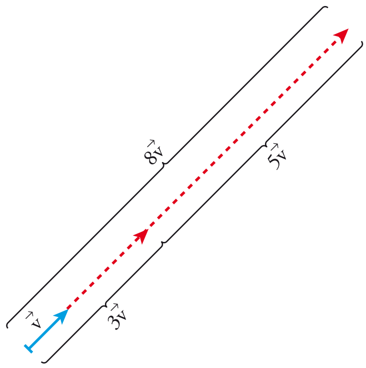
a) Suma de números:

$a + b$

Suma de vectores:

$a\vec{v} + b\vec{v}$

b) $\left.\begin{array}{l} (a + b) \cdot \vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array}\right\} \; 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$



2 Expresión analítica de un vector

Página 128

1 Si $\vec{u}(-3, 5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, -2)$, halla las coordenadas de:

a) $2\vec{u}$ b) $0\vec{v}$ c) $-\vec{u}$ d) $2\vec{u} + \vec{v}$ e) $\vec{u} - \vec{v}$ f) $5\vec{u} - 3\vec{v}$

a) $2\vec{u} = 2 \cdot (-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$

b) $0\vec{v} = (0, 0, 0)$

c) $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$

d) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$

e) $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$

f) $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) - 3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

2 Sean los vectores:

$$\vec{x}(1, -5, 2),\ \vec{y}(3, 4, -1),\ \vec{z}(6, 3, -5),\ \vec{w}(24, -26, -6)$$

Halla *a*, *b*, *c* para que se cumpla $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$.

$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$

$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$

$$\left.\begin{array}{r} a + 3b + 6c = 24 \\ -5a + 4b + 3c = -26 \\ 2a - b - 5c = -6 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6;$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2;$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solución: $a = 6$, $b = 2$, $c = 4$, es decir, $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$.

3 Producto escalar de vectores

Página 131

1 **Respecto de una base ortonormal, las coordenadas de tres vectores son $\vec{u}(3, -1, 5)$, $\vec{v}(4, 7, 11)$, $\vec{w}(-2, k, 3)$.**

a) Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Halla k para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -1, 5) \cdot (4, 7, 11) = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 + 5 \cdot 11 = 12 - 7 + 55 = 60$

b) Como $\vec{v} \neq 0$ y $\vec{w} \neq 0$, son perpendiculares si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 4 \cdot (-2) + 7 \cdot k + 11 \cdot 3 = -8 + 7k + 33 = 7k + 25 = 0 \rightarrow k = -\dfrac{25}{7}$

Página 133

2 **Dados los vectores $\vec{u}(5, -1, 2)$, $\vec{v}(-1, 2, -2)$, calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$

c) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. (Segmento y vector).

e) ¿Cuánto tiene que valer x para que el vector $(7, 2, x)$ sea perpendicular a $\vec{u}$?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - 2 - 4 = -11$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5{,}48$

$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

c) $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{30} \cdot 3} \approx -0{,}669 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 132°\ 1'\ 26''$

d) *Segmento proyección de* $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-11}{3} = -3{,}67$

Significa que el vector proyección de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$ tiene módulo 3,67 y sentido contrario al de $\vec{v}$.

Vector proyección de $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v} = \dfrac{-11}{9}(-1, 2, -2)$

Segmento proyección de $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{30}} \approx -2{,}008$

Vector proyección de $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u} = \dfrac{-11}{30}(5, -1, 2)$

e) $(5, -1, 2) \cdot (7, 2, x) = 35 - 2 + 2x = 33 + 2x = 0 \rightarrow x = \dfrac{-33}{2}$

3 **Obtén tres vectores que no sean paralelos entre sí y que sean perpendiculares a este otro vector:**

$\vec{\mathbf{v}}\,(\mathbf{3, 2, 7})$

Un vector, $\vec{u}\,(x, y, z)$, es perpendicular a $\vec{v}\,(3, 2, 7)$ si: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2y + 7z = 0$

Por ejemplo: (0, –7, 2); (–7, 0, 3); (–2, 3, 0).

4 **Halla un vector que sea perpendicular a estos dos vectores dados:**

$\vec{\mathbf{u}}\,(\mathbf{5, -1, 2})$ $\qquad$ $\vec{\mathbf{v}}\,(\mathbf{-1, 2, -2})$

Queremos hallar las coordenadas de un vector $\vec{w}\,(x, y, z)$ que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} \perp \vec{u} \ \Rightarrow \ (5, -1, 2) \cdot (x, y, z) = 5x - y + 2z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{u} \ \Rightarrow \ (-1, 2, -2) \cdot (x, y, z) = -x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones proporcionales. Una de ellas es $x = -2$, $y = 8$, $z = 9$.

Es decir, el vector buscado puede ser (–2, 8, 9) o cualquier otro paralelo a él.

4 Producto vectorial

Página 136

1 Halla el producto vectorial de $\vec{u}(3, 7, -6)$ y $\vec{v}(4, 1, -2)$.

$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$

2 Halla un vector perpendicular a estos dos vectores:

$\vec{u}(3, 7, -6)$ $\quad$ $\vec{v}(4, 1, -2)$

$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$ o cualquier vector proporcional a él.

3 Halla el área del triángulo determinado por los siguientes vectores:

$\vec{u}(3, 7, -6)$ $\quad$ $\vec{v}(4, 1, -2)$

Área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(3, 7, -6) \times (4, 1, -2)| = |(-8, -18, -25)| = \sqrt{8^2 + 18^2 + 25^2} = \sqrt{1013}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1013}}{2} \approx 15,91 \text{ u}^2$$

5 Producto mixto de tres vectores

Página 137

1 **Halla el volumen del paralelepípedo definido por los siguientes vectores:**

$$\vec{u}(3, -5, 1) \qquad \vec{v}(7, 4, 2) \qquad \vec{w}(0, 6, 1)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 53 \ \rightarrow \ \text{Volumen} = 53 \text{ u}^3$$

2 **Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{z}(1, 14, x)$ sean coplanarios (es decir, que el volumen del paralelepípedo que determinan sea cero).**

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 14 & x \end{vmatrix} = 47x = 0 \ \rightarrow \ x = 0$$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 138

1. Combinación lineal de vectores

Hazlo tú. Dados estos vectores:

$$\vec{u}(1, -3, 2),\ \vec{v}(-2, 6, -4),\ \vec{w}(2, 0, 1)$$

a) Expresa, si es posible, $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

a) $(1, -3, 2) = x(-2, 6, 4) + y(2, 0, 1)$

Obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -2x + 2y &= 1 \\ 6x \quad\ &= -3 \\ -4x + y &= 2 \end{aligned}\right\} \to x = \frac{-1}{2},\ y = 0$$

La solución obtenida es $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v} + 0\vec{w}$.

b) Observando el apartado anterior, vemos que $-2\vec{u} = \vec{v}$, luego no pueden ser linealmente independientes los tres vectores.

2. Vectores perpendiculares

Hazlo tú.

a) Comprueba si los vectores $\vec{a}(2, -1, 0)$ y $\vec{b}(1, -2, -1)$ son ortogonales.

b) Halla un vector unitario que sea perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.

a) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -1, 0) \cdot (1, -2, -1) = 4 \neq 0 \to$ No son ortogonales.

b) $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a los dos vectores.

$\vec{u} = (2, -1, 0) \times (1, -2, -1) = (1, 2, -3)$

$|\vec{u}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

El vector que nos piden es: $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, -\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$

Página 139

3. Vectores coplanarios

Hazlo tú.

a) Halla el valor de m para que los vectores $\vec{u}(2, 3, 0)$, $\vec{v}(1, m, -1)$ y $\vec{w}(-2, 0, 6)$ sean coplanarios.

b) Comprueba si para ese valor de m algún par de los vectores dados son perpendiculares.

a) $\vec{w}$ es coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores es cero.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \to 12m - 12 = 0 \to m = 1$$

Luego los vectores son coplanarios si $m = 1$.

b) $\vec{u} = (2, 3, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$, $\vec{w} = (-2, 0, 6)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3, 0) \cdot (1, 1, -1) = 5 \neq 0$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3, 0) \cdot (-2, 0, 6) = -4 \neq 0$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (1, 1, -1) \cdot (-2, 0, 6) = -8 \neq 0$

Ningún par de los vectores dados son perpendiculares.

4. Hallar un vector con ciertas condiciones

Hazlo tú. Dados estos vectores:

$$\vec{u}(3, -2, \sqrt{3}), \quad \vec{v}(4, -2, -4)$$

halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ y el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$\vec{u} = (3, -2, \sqrt{3})$, $\vec{v} = (4, -2, -4)$

$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 4 + 3} = 4$

$|\vec{v}| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$

$$\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(3, -2, \sqrt{3}) \cdot (4, -2, -4)}{6 \cdot 4} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{24}$$

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = arc\ cos\left(\frac{16 - 4\sqrt{3}}{24}\right) = arc\ cos\ 0{,}37799 = 1{,}1832 \text{ rad}$$

$\vec{w}$ = vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$$\text{Vector proyección} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{36}(4, -2, -4) = \left(\frac{16}{9} - \frac{4}{9}\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3} - \frac{8}{9}, \frac{4}{9}\sqrt{3} - \frac{16}{9}\right)$$

Y tiene el mismo sentido que $\vec{v}$ por ser $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$.

5. Ángulo que forman dos vectores

Hazlo tú. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ sabiendo que $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 8$ y $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 45°$.

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$$

$$= 36 + 64 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100 + 48\sqrt{2}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{100 + 48\sqrt{2}}$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 140

1. Módulo de un vector

En un vértice de un cubo se aplican tres fuerzas, $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ y $\vec{f}_3$ dirigidas según las diagonales de las tres caras que pasan por dicho vértice. Si sus módulos son, respectivamente, 1, 2 y 3, hallar el módulo de la resultante.

$$|\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3|^2 = (\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3) \cdot (\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3) =$$

$$= \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_1 + \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 + \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_3 + \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_2 + \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_3 + \vec{f}_3 \cdot \vec{f}_1 + \vec{f}_3 \cdot \vec{f}_2 + \vec{f}_3 \cdot \vec{f}_3 =$$

$$= |\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 + |\vec{f}_3|^2 + 2\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 + 2\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_3 + 2\vec{f}_2 \cdot \vec{f}_3 =$$

$$= 1 + 4 + 9 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot cos(60°) + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot cos(60°) + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot cos(60°) =$$

$$= 14 + 2 + 3 + 6 = 25 \to |\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3| = \sqrt{25} = 5$$

2. Volumen de un paralelepípedo

Hallar el valor de m para que los vectores $\vec{a}(3, 0, 1)$, $\vec{b}(0, m, -1)$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ determinen un paralelepípedo de volumen igual a 49 u^3.

Calculamos $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b} = (3, 0, 1) \times (0, m, -1) = (-m, 3, 3m)$.

Volumen del paralelepípedo:

$$[\vec{u}, \vec{a}, \vec{b}] = B_1 = 10m^2 + 9$$

Igualamos a 49:

$$10m^2 + 9 = 49 \to m = 2, \ m = -2$$

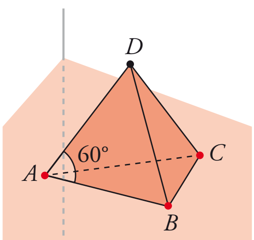
3. Tetraedro regular

Sea ABCD un tetraedro regular de arista a. Demostrar que:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{a^2}{2}$

b) Las aristas opuestas son ortogonales.

a)



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| cos\ 60° = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2$$

Lo mismo ocurre con todos los productos.

b) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0$$

Luego $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

4. Base y coordenadas

Dados los vectores $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(0, 1, -3)$, $\vec{c}(0, 2, -1)$ ***y*** $\vec{d}(7, -4, 5)$:

a) Justificar cuál de los siguientes conjuntos $B_1 = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, $B_2 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ ***o*** $B_3 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ***es una base.***

b) Determinar las coordenadas de $\vec{d}$ ***en dicha base.***

a) B_1 y B_2 no son bases porque no tienen exactamente 3 vectores.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \ \to \ \text{Los vectores son linealmente independientes.}$$

B_3 sí es una base porque está formada por 3 vectores linealmente independientes.

b) $(7, -4, 5) = x(1, -1, 0) + y(0, 1, -3) + z(0, 2, -1)$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad\qquad = 7 \\ -x + y + 2z = -4 \\ -3y - \ \ z = 5 \end{array}\right\} \to \ x = 7, \ \ y = -\frac{13}{5}, \ \ z = \frac{14}{5}$$

Las coordenadas de $\vec{d}$ en la base B_3 son: $\vec{d}\left(7, -\frac{13}{5}, \frac{14}{5}\right)$

5. Proyección de un vector sobre otro

a) Calcular las coordenadas del vector proyección de $\vec{a}(2, 0, 0)$ ***sobre*** $\vec{b}(2, 2, 0)$.

b) Hallar la longitud de la proyección de $\vec{a}$ ***sobre*** $\vec{b}$.

c) Hallar el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{a}$ ***y*** $\vec{b}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 0, 0) \cdot (2, 2, 0) = 4 > 0$

$\vec{u}$ = vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

$|\vec{b}| = \sqrt{8}$

Vector proyección: $\vec{u} = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \dfrac{4}{8}(2, 2, 0) = (1, 1, 0)$

b) Segmento proycción: $proy_{\vec{b}}(\vec{a}) = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \dfrac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$ u

c) Área $= \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \dfrac{1}{2}|(2, 0, 0) \times (2, 2, 0)| = \dfrac{1}{2}|(0, 0, 4)| = 2$ u^2

Ejercicios y problemas propuestos

Página 141

Para practicar

Dependencia e independencia lineal. Base y coordenadas

1 **Dados estos vectores:**

$$\vec{u}(1, -3, 2),\ \ \vec{v}(2, 0, 1),\ \ \vec{w}(5, -3, 4),\ \ \vec{z}(-2, 6, -4)$$

a) ¿Cuántos de ellos son linealmente independientes?

b) Expresa, si se puede, $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Expresa, si se puede, $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{z}$.

d) Calcula m para que el vector $\vec{t}(-1, m, 7)$ sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) Como mucho puede haber 3 vectores linealmente independientes.

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \ \to$ Hay al menos dos vectores linealmente independientes.

A partir de este menor distinto de cero, buscamos los menores de orden 3 que lo contienen:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Como todos los menores de orden 3 son iguales a cero:

$ran \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix} = 2 \ \to$ Hay 2 vectores linealmente independientes.

b) $(5, -3, 4) = x(1, -3, 2) + y(2, 0, 1) \ \to \ \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -3x = -3 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \ \to \ x = 1,\ y = 2$

$\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$

c) $(5, -3, 4) = x(1, -3, 2) + y(-2, 6, -4) \ \to \ \begin{cases} x - 2y = 5 \\ -3x + 6y = -3 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases} \ \to$ No tiene solución, luego no se puede.

d) $(-1, m, 7) = x(1, -3, 2) + y(2, 0, 1) \ \to \ \begin{cases} x + 2y = -1 \\ -3x = m \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

Para que tenga solución est sistema, el rango de la matriz ampliada tiene que ser 2:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & m \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \ \to \ 3m + 45 = 0 \ \to \ m = -15$

Si $m = -15$, el vector $\vec{t}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

2 **Comprueba que no es posible expresar el vector $\vec{x}(3, -1, 0)$ como combinación lineal de $\vec{u}(1, 2, -1)$ y $\vec{v}(2, -3, 5)$.**

¿Son linealmente independientes $\vec{x}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \rightarrow (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= a + 2b \\ -1 &= 2a - 3b \\ 0 &= -a + 5b \end{aligned}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $|A'| = 28 \neq 0$, el sistema es *incompatible*.

Luego no es posible expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Como $ran(A') = 3$, los tres vectores son linealmente independientes.

3 **Comprueba que cualquiera de los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$, $\vec{c}(1, 0, 1)$ puede expresarse como C.L. de los otros dos.**

$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \rightarrow (1, 2, 3) = x(2, 1, 3) + y(1, 0, 1)$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 2x + y \\ 2 &= x \\ 3 &= 3x + y \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y &= -3 \\ x &= 2 \\ y &= -3 \end{aligned}\right\} \quad \text{Por tanto: } \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

De aquí, también obtenemos que: $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$; $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

4 **Determina m y n para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:**

a) $\vec{u}(m, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 3, m)$, $\vec{w}(4, 6, -4)$ **b) $\vec{u}(3, 2, 5)$, $\vec{v}(2, 4, 7)$, $\vec{w}(1, -1, n)$**

a) $$\begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6m^2 - 24m - 24 = -6(m^2 + 4m + 4) = -6(m + 2)^2 = 0 \rightarrow m = -2$$

Si $m = -2$, los vectores son linealmente dependientes.

b) $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 8n + 5 = 0 \rightarrow n = \frac{-5}{8}$$

Si $n = \frac{-5}{8}$, los vectores son linealmente dependientes.

5 **¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base? Justifica tus respuestas:**

***A* = {(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)}** ***B* = {(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)}**

***C* = {(–3, 2, 1), (1, 2, –1), (1, 0, 1)}**

A = {(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)}

Como (2, 2, 2) = (1, 2, 1) + (1, 0, 1), los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no son una base.

B = {(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)}

Al ser cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, son dependientes, luego no son una base.

C = {(–3, 2, 1), (1, 2, –1), (1, 0, 1)}

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{Los vectores son linealmente independientes.}$$

Un conjunto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes es una **base** de $\mathbb{R}^3$.

6 **¿Para qué valores del parámetro a el conjunto de vectores $S = \{(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)\}$ es una base?**

Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$, formarán una base cuando sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

Por tanto, S es una base cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Producto de vectores

7 **En una base ortonormal tenemos $\vec{a}(1, 2, 2)$ y $\vec{b}(-4, 5, -3)$. Calcula:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$

c) $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

e) $\vec{a} \times \vec{b}$

f) $|\vec{a} \times \vec{b}|$

g) El segmento proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

h) El vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$

c) Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 90°$

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 9 - 50 = -41$

e) $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 2, 2) \times (-4, 5, -3) = (-16, -5, 13)$

f) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-16)^2 + (-5)^2 + (13)^2} = 15\sqrt{2}$

g) $|\vec{b}| = \sqrt{50}$

Segmento proyección $= proy_{\vec{b}}(\vec{a}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{(1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3)}{\sqrt{50}} = 0$

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, luego el segmento proyección mide 0 unidades.

h) Vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ (vector cero).

8 **Dados los siguientes vectores:**

$$\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k} \qquad \vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$$

halla m para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean…

a) paralelos.

b) ortogonales.

$\vec{a}(1, m, 1)$; $\vec{b}(-2, 4, m)$

a) $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{4}{m} = \dfrac{m}{1} \rightarrow m = -2$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \rightarrow m = \dfrac{2}{5}$

9 **Halla el vector proyección del vector $\vec{u}(3, 1, 2)$ sobre el vector $\vec{v}(1, -1, 2)$.**

Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\frac{(3,1,2)\cdot(1,-1,2)}{|(1,-1,2)|^2}(1,-1,2)=\frac{3-1+4}{1^2+1^2+2^2}(1,-1,2)=\frac{6}{6}(1,-1,2)=(1,-1,2)$$

La proyección es el propio vector $\vec{v}$.

Vamos a comprobarlo de manera razonada.

Longitud de la proyección:

$$|\vec{u}|\,cos\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\sqrt{3^2+1^2+2^2}\,\frac{(3,1,2)\cdot(1,-1,2)}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}\,\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{3-1+4}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

El vector proyección se obtiene multiplicando su longitud por un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v}$: $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\sqrt{6}\cdot\frac{(1,-1,2)}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}(1,-1,2)=(1,-1,2)$$

10 **¿Son $\vec{a}(1, 2, 3)$ y $\vec{b}(2, -2, 1)$ ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.**

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1, 2, 3)\cdot(2, -2, 1)=2-4+3=1\neq 0 \rightarrow$ no son ortogonales.

Si llamamos α al ángulo que forman, entonces:

$$cos\,\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{14}\,\sqrt{9}}\approx 0{,}089 \rightarrow \alpha=84°\ 53'\ 20''$$

11 **Calcula m para que el vector $\vec{a}(1, 3, m)$ sea ortogonal al vector $\vec{b}(1, -2, 3)$.**

$$\vec{a}\perp\vec{b}\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=(1, 3, m)\cdot(1, -2, 3)=1-6+3m=3m-5=0 \rightarrow m=\frac{5}{3}$$

12 **Comprueba que el vector $\vec{u}(1/2, 1/2, 0)$ no es unitario y da las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$.**

$$|\vec{u}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 1 \rightarrow \vec{u}\ \text{no es unitario.}$$

Un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$ sería:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right).\ \text{También podría ser}\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right).$$

13 **Dados $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{v}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, comprueba que los vectores $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{v}\times\vec{u}$ son opuestos, y halla su módulo.**

$\vec{u}(2, -1, 1)$; $\vec{v}(-1, 3, 2)$

$\vec{u}\times\vec{v}=(-5, -5, 5)$; $\vec{u}\times\vec{v}=(5, 5, -5)=-\vec{u}\times\vec{v}$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2+5^2}=\sqrt{3\cdot 25}=5\sqrt{3}\approx 8{,}66$$

14 Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}(7, -1, 2)$ y $\vec{b}(1, 4, -2)$.

Área = $|\vec{a} \times \vec{b}| = |(-6, 16, 29)| = \sqrt{(-6)^2 + 16^2 + 29^2} = \sqrt{1133} \approx 33{,}66\ \text{u}^2$

15 Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, 3, 1)$ y a $\vec{v}(-1, 3, 0)$ y que sea unitario.

$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, -1, 9)$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$

Luego el vector que buscamos es: $\left(\dfrac{-3}{\sqrt{91}}, \dfrac{-1}{\sqrt{91}}, \dfrac{9}{\sqrt{91}}\right)$

16 Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(1, -1, 0)$ y $\vec{v}(2, 0, 1)$ cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.

Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)$$

Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es:

$$\frac{1}{|(-1, -1, 2)|}(-1, -1, 2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$$

Para que el módulo sea $\sqrt{24}$:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2) = 2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$$

El vector $(-2, -2, 4)$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, y su módulo es $\sqrt{24}$.

También cumple estas condiciones su opuesto: $(2, 2, -4)$.

17 Halla el producto mixto de los tres vectores que aparecen en cada caso:

a) $\vec{u}(1, -3, 2)$, $\vec{v}(1, 0, -1)$, $\vec{w}(2, 3, 0)$

b) $\vec{u}(3, 2, 1)$, $\vec{v}(1, -2, 0)$, $\vec{w}(-4, 1, 1)$

c) $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(3, 0, 2)$, $\vec{w}(-1, 4, -4)$

Calcula, en cada apartado, el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$

El paralelepípedo tiene un volumen de 15 u^3.

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$

El paralelepípedo tiene un volumen de 15 u^3.

c) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Los tres vectores no forman un paralelepípedo (los vectores son coplanarios).

18 **Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(-2, 1, 0)$ y $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Justifica por qué el resultado es $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$.**

- $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$

  $$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \to \text{Volumen} = 70 \text{ u}^3$$

- $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$

  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |(\vec{u} \times \vec{v})|^2$

19 **Calcula el volumen del tetraedro determinado por los vectores siguientes:**

$$\vec{a}(3, -1, 1), \quad \vec{b}(1, 7, 2), \quad \vec{c}(2, 1, -4)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \to \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 111 = 18{,}5 \text{ u}^3$$

20 **Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(1, m, 3)$ y $\vec{w}(-4, 5, -1)$ sean coplanarios.**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \to m = -4$$

Página 142

Para resolver

21 **Considera los siguientes vectores:**

$$\vec{u}(1, -1, 3), \quad \vec{v}(1, 0, -1), \quad \vec{w}(m, 1, 0)$$

a) Calcula el valor de m para el cual $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son ortogonales.

b) Halla los valores de m que hacen que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

c) Para $m = 1$ escribe el vector $\vec{s}(3, 0, 2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{w} \iff \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1, -1, 3) \cdot (m, 1, 0) = m - 1 \to m - 1 = 0 \to m = 1$

Son ortogonales cuando $m = 1$.

b) Los vectores son linealmente independientes si el rango de la matriz que forman es 3, es decir, si el determinante de la matriz que forman no vale 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ m & 1 & 0 \end{vmatrix} = m + 4$$

Son linealmente independientes si $m \neq -4$

c) $(3, 0, 2) = x(1, -1, 3) + y(1, 0, -1) + z(1, 1, 0)$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x + \phantom{y +{}} z = 0 \\ 3x - y \phantom{{}+ z} = 2 \end{array}\right\} \to x = 1, \; y = 1, \; z = 1$$

$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

22 **Prueba que los vectores $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$, $(0, 0, 1)$ son linealmente independientes cualesquiera que sean a, b y c.**

$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ para cualquier valor de a, b, c.

Por tanto, son linealmente independientes.

23 **Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, -1)$ y $\vec{b}(1, 3, 0)$, comprueba que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.**

$\vec{a}(1, 2, -1)$

$\vec{b}(1, 3, 0)$

$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$

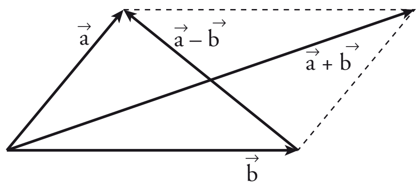
$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0$. Por tanto, $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$.

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (0, -1, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0$. Por tanto, $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$.

Hasta aquí, la comprobación rutinaria, numérica. Más interesante es la siguiente reflexión:



Los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto, están en el plano definido por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Y el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a dicho plano.

Así, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares a $\vec{a} \times \vec{b}$.

24 **a) Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}(3, -2, 1)$ y $\vec{v}(4, 3, -6)$ es un rectángulo.**

b) Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$. Luego $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

b) $\left.\begin{array}{l} \text{Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array}\right\}$ Área $= \sqrt{854} \approx 29,22\ \text{u}^2$

Por otra parte:

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29,22\ \text{u}^2$

25 **Dado el vector $\vec{v}(-2, 2, -4)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores:**

a) Unitario y perpendicular a $\vec{v}$.

b) Paralelos a $\vec{v}$ y de módulo 6.

a) $\vec{u}(x, y, z)$ ha de cumplir $-2x + 2y - 4z = 0$ y ser unitario.

Por ejemplo, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

b) $(-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -2\sqrt{6})$ y $(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$

26 **Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(2, 3, -1)$ y a $\vec{v}(1, 4, 2)$ cuya tercera componente sea 1.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (10, -5, 5) \parallel (2, -1, 1)$

El vector que buscamos es $(2, -1, 1)$.

27 **Dados los siguientes vectores: $\vec{u}_1(2, 0, 0)$, $\vec{u}_2(0, 1, -3)$, $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{u}_3$ sea ortogonal al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$?**

$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$

Para que $\vec{u}_3$ sea perpendicular a $\vec{v}$ ha de ser:

$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0$, es decir, $a = b$.

28 **Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{v}(1, 2, 3)$ y $\vec{w}(1, -1, 1)$ y tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.**

$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$

Un vector ortogonal a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$ es de la forma $(5k, 2k, -3k)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Por tanto: $\vec{u}\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

29 **a) Determina los valores de a para los que resultan linealmente dependientes los vectores $(-2, a, a)$, $(a, -2, a)$ y $(a, a, -2)$.**

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

a) $$\begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a-1)(a+2)^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Para $a = 1$ y para $a = -2$, los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para $a = 1$, queda: $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, -2)$ y tenemos que:

$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$

Para $a = -2$, queda: $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$ y tenemos que:

$1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$

30 **Dados los siguientes vectores:**

$$\vec{u}(1, 0, -1), \quad \vec{v}(0, a+1, 0), \quad \vec{w}(1, 1, a-1)$$

a) Halla los valores de a para los que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}(1, 2, 3)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$.

c) Justifica razonadamente si para $a = 1$ se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

a) $$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0+1 & 0 \\ 1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = a(a+1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

b) Para $a = 2$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Así, cualquier otro vector, y, en particular $\vec{c}(1, 2, 3)$, depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para $a = 2$, tenemos que: $\vec{u}(1, 0, -1)$, $\vec{v}(0, 3, 0)$, $\vec{w}(1, 1, 1)$.

$(1, 2, 3) = x(1, 0, -1) + y(0, 3, 0) + z(1, 1, 1)$

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad\quad z = 1 \\ 3y + z = 2 \\ -x + \quad\quad z = 3 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-6}{6} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0}{6} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Por tanto:

$\vec{c} = -\vec{u} + 2\vec{w}$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ para $a = 1$. Está probado en el apartado a).

31 Dados los siguientes vectores $\vec{u}(1, -1, 0)$, $\vec{v}(0, 1, 2)$ y $\vec{w}(k + 1, 2k, 2 - 3k)$, halla los valores de k…

a) para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean coplanarios.

b) para que $\vec{w}$ sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

c) para que el volumen del tetraedro que tiene por aristas los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sea igual a 1/6.

a) Si los vectores son coplanarios, entonces son linealmente dependientes, es decir, el rango de la matriz que forman es < 3, luego el determinante de la matriz vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ k+1 & 2k & 2-3k \end{vmatrix} = -9k = 0 \rightarrow k = 0$$

b) $\vec{w}$ tiene que ser proporcional al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$(1, -1, 0) \times (0, 1, 2) = (-2, -2, 1)$

$$\frac{k+1}{-2} = \frac{2k}{-2} = \frac{2-3k}{1}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2k = -4 + 6k \\ k + 1 = 2k \end{array}\right\} \rightarrow k = 1$$

c) El volumen del tetraedro es:

$$\left|\frac{1}{6}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ k+1 & 2k & 2-3k \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{9}{6}k = \frac{1}{6} \rightarrow k = \frac{1}{9}$$

32 **a) Halla el número de vectores linealmente independientes que hay en este conjunto:**

$$S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$$

b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de S?

c) Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S.

a) Tenemos que hallar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \ \ ran(M) = 3.$$

Por tanto, hay tres vectores linealmente independientes en S.

b) Sí. Si tiene sus tres componentes iguales y es no nulo, es de la forma: $\vec{u} = (k, k, k)$ con $k \neq 0$. Entonces, podemos obtenerlo a partir de los dos primeros vectores de S como sigue:

$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$

c) Sea $\vec{v}(1, 1, x)$ el vector que buscamos. Para que se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S, tenemos que:

$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$

$$\left.\begin{array}{l} 2b = 1 \\ 2a = 1 \\ a - 3b = x \end{array}\right\} \text{ Debe tener solución: } b = \frac{1}{2}, \ a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = x \ \rightarrow \ x = \frac{-2}{2} = -1 \ \rightarrow \ x = -1$$

Por tanto, el vector es $\vec{v}(1, 1, -1)$.

33 **Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$ y tal que determine con el vector $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u².**

Si $\vec{u}$ es de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$, será de la forma $\vec{u}(x, -2x, 3x)$, con $x \neq 0$.

Para que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u², ha de ser:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x|\sqrt{125} = 25$$

Es decir: $125x^2 = 625 \ \rightarrow \ x^2 = 5 \ \rightarrow \ x = \pm\sqrt{5}$

Por tanto, hay dos soluciones: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$.

34 **Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a}(2, -1, 1)$ y $\vec{b}(1, 0, 3)$ y ortogonal a $\vec{c}(2, 3, 0)$.**

Sea $\vec{v}(x, y, z)$ tal que:

1.º) es coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$

2.º) es ortogonal a $\vec{c}$, es decir: $(x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} -3x + z = 5y \\ 2x = -3y \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} z = 5y + 3x = 5y - \frac{9}{2}y = \frac{1}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}y \end{array}$$

Soluciones: $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$ $(\lambda \neq 0)$

Todos los vectores de esta forma cumplen las condiciones. Por ejemplo, para $\lambda = 1$, tenemos el vector $(-3, 2, 1)$.

35 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 2$, con $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60° =$$

$$= 16 + 4 + 8 = 28 \;\rightarrow\; |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Por otra parte:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 16 + 4 - 8 = 12 \;\rightarrow\; |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

36 **De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$. Halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.**

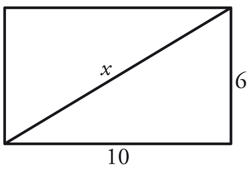
Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Así:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \;\rightarrow\; |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 136 \;\rightarrow\; |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66$$

Observación: Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces forman los lados de un rectángulo con base y altura $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$. En este caso, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales, que tienen el mismo módulo (por tratarse de un rectángulo). Además, para hallar la longitud de la diagonal, podemos aplicar en este caso el teorema de Pitágoras:



$$x^2 = 10^2 + 6^2 \;\rightarrow\; x^2 = 136 \;\rightarrow\; x = \sqrt{136} \approx 11,6$$

37 **De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que cumplen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$, siendo $\vec{a}(2, -1, 0)$ y $\vec{b}(1, 3, -1)$. Halla el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

$$\left.\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} &= \vec{b} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 3\vec{u} + 3\vec{v} &= 3\vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} &= \vec{b} \\ \hline 5\vec{u} \qquad &= 3\vec{a} + \vec{b} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2\vec{u} + 2\vec{v} &= 2\vec{a} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} &= -\vec{b} \\ \hline 5\vec{v} &= 2\vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincide con el ángulo formado por $\vec{u}' = 5\vec{u}$ y $\vec{v}' = 5\vec{v}$:

$\vec{u}' = (7, 0, -1)$; $\vec{v}' = (3, -5, 1)$

$\vec{u}' \cdot \vec{v}' = 20$

$|\vec{u}'| = \sqrt{50}$; $|\vec{v}'| = \sqrt{35}$

$$\cos(\widehat{\vec{u}', \vec{v}'}) = \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}'}{|\vec{u}'||\vec{v}'|} = \frac{20}{\sqrt{50}\,\sqrt{35}} = 0,4781$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}', \vec{v}'}) = 61°\ 26'\ 21''$$

38 **Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumplen las siguientes condiciones:**

$$|\vec{u}| = 5, \quad |\vec{v}| = 4, \quad |\vec{w}| = 7, \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Desarrollando el producto escalar indicado:

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 2(\vec{u} \cdot \vec{w}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

Por otra parte:

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$$

Así:

$$52 + 42 + 72 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{90}{2} = -45$$

Cuestiones teóricas

39 **Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿podemos asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?**

No. Por ejemplo, si $\vec{u}(3, -2, 0)$, $\vec{v}(5, 1, 0)$ y $\vec{w}(7, 4, 0)$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13 \end{array}\right\} \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sin embargo, $\vec{v} \neq \vec{w}$

40 **Prueba, utilizando el producto escalar, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$ entonces $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.**

$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

Para demostrar que $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, tenemos que probar que su producto escalar es cero:

$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$

Por tanto, $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

41 **a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$?**

b) Si dos vectores verifican $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|$, ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \cdot 2 \cdot cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -3 \rightarrow cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{3}{2} > 1$ Imposible.

Luego no existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

b) Si $|\vec{u}|\,|\vec{v}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \rightarrow |\vec{u}|\,|\vec{v}| = \left\langle \begin{array}{l} +|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \\ -|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \end{array} \right. \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} |\vec{u}|\,|\vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \rightarrow cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0° \\ |\vec{u}|\,|\vec{v}| = -|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \rightarrow cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 180° \end{array}\right.$$

Por tanto, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

Página 143

42 Dados los vectores $\vec{a}(1, -2, 3)$, $\vec{b}(3, 1, 1)$, $\vec{c}(-2, 0, 1)$, comprueba que:

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, 1, 2) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-5, 8, 7) + (-2, -7, -4) = (-7, 1, 3)$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-5, 8, 7) \times (-2, 0, 1) = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, -5, 2) = (11, 1, -3)$

43 Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, ¿es $\vec{b} = \vec{c}$ necesariamente? Pon ejemplos.

No. Por ejemplo, si consideramos $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 4, 6)$ y $\vec{c}(3, 6, 9)$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \end{array}\right\} \to \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \text{ pero } \vec{b} \neq \vec{c}$$

44 Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0:

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}], \quad [\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}], \quad [\vec{a} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}]$$

Puesto que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son L.I., los tomamos como base. Por tanto:

$\vec{a} + \vec{c} = (1, 0, 1)$ $\quad \vec{a} - \vec{c} = (1, 0, -1)$ $\quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1, 1, 1)$

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Son L.I.}$$

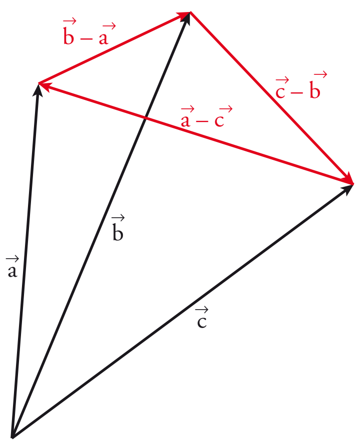
Análogamente:

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ Son L.I.}$$

$$[\vec{a} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \text{ Son L.D.}$$

Interpretación gráfica de este último resultado:

Los vectores $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$ son los lados de un triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ cuando los situamos con origen común. Por tanto, $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{b}$ y $\vec{b} - \vec{a}$ son coplanarios.



45 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas y pon ejemplos.**

a) Existen infinitos vectores coplanarios con $\vec{a}(2, -3, 0)$ y $\vec{b}(1, 0, -2)$ y ortogonales a $\vec{c}(-1, 1, -4)$.

b) Si $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$ y el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es de 60°, entonces $|\vec{a} + \vec{b}| = 8$.

c) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son tres vectores cualesquiera, entonces $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

d) El vector $\frac{3}{|\vec{a}|}\vec{a}$, tiene la misma dirección y sentido que $\vec{a}$ y su módulo es 3.

e) Si $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son dos vectores cualesquiera y $k \in \mathbb{R}$ entonces $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = k\vec{u} \cdot k\vec{v}$.

f) El producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $2\vec{a} - 3\vec{b}$ es igual a 0, cualesquiera que sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

g) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}|\,|\vec{v}|$ entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección y sentidos opuestos.

h) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores no nulos que cumplen $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, entonces $\vec{b} = \vec{c}$.

a) Los vectores $\vec{u}$ coplanarios con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son:

$\vec{u} = x(2, -3, 0) + y(1, 0, -2) = (2x + y, -3x, -2y)$

para que sean ortogonales a $\vec{c} = (-1, 1, -4)$.

$\vec{u} \cdot \vec{c} = 0 \to (2x + y, -3x, -2y) \cdot (-1, 1, -4) = 0 \to 7y - 5x = 0 \to x = \frac{7}{5}\lambda$, que tiene infinitas soluciones, luego es verdadero.

Los vectores son de la forma:

$$\vec{u} = \frac{7}{3}\lambda(2, -3, 0) + \lambda(1, 0, -2) = \lambda\left(\frac{19}{5}, \frac{-21}{5}, \frac{-10}{5}\right) // \lambda(19, -21, -10)$$

b) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$

$= 25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 49$

$|\vec{a} + \vec{b}| = 7 \to$ es falso.

c) Falso, como se ve en el ejercicio 42 b) de esta sección.

d) Verdadero, tiene la misma dirección porque es un escalar por el vector $\vec{a}$, tiene el mismo sentido porque $\frac{3}{|\vec{a}|} > 0$.

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ tiene módulo 1 $\to$ $\frac{3}{|\vec{a}|}\vec{a} = 3\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ tiene módulo 3.

Ejemplo:

$\vec{a}(1, 0, 0)$ $\quad |\vec{a}| = 1$ $\quad \frac{3}{1}\vec{a} = (3, 0, 0)$

que tiene el mismo sentido y la misma dirección de $\vec{a}$ y su módulo es 3.

e) Falso, $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v}$

Ejemplo:

$2 \cdot (1, 0, 0) \cdot (3, 0, 0) = (2, 0, 0) \cdot (3, 0, 0) = 2 \cdot 3 = 6$

$2 \cdot (1, 0, 0) \cdot 2(3, 0, 0) = (2, 0, 0) \cdot (6, 0, 0) = 12$

f) Verdadero, porque los tres vectores son linealmente dependientes, luego son coplanarios y por tanto, el producto mixto es cero.

Ejemplo:

$a(1, 0, 0)$; $b(0, 1, 0)$ $\quad 2a - 3b = (2, -3, 0)$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

g) Verdadero, puesto que si $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \rightarrow -1 = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 180° \rightarrow$ tienen la misma dirección y sentidos opuestos.

h) Falso, como se ha visto en el ejercicio 43 de esta sección.

Tomamos $\vec{b} \,//\, \vec{a} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Tomamos $\vec{c} = 2\vec{b} \rightarrow \vec{c} \,//\, \vec{a} \rightarrow \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$

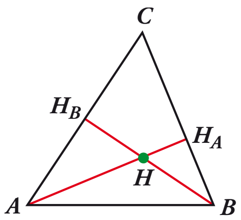
En este caso, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, y, sin embargo, $\vec{b} \neq \vec{c}$.

Para profundizar

46 **"Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto".**

Para demostarlo, llamamos H al punto en el que se cortan dos alturas, AH_A y BH_B.

Da los pasos que se indican a continuación:



a) Justifica que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0 \\ \overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0 \end{cases}$$

b) De las igualdades anteriores se llega a:

$$\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0$$

y de aquí se concluye que $\overrightarrow{HC} \perp AB$ y, por tanto, que las tres alturas se cortan en H. (Justifica las afirmaciones anteriores).

a) $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BC}$; y, como AH_A es la altura correspondiente al lado BC, entonces:

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH_A} \rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{HA} \rightarrow \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \rightarrow \overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$

Análogamente, como $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC}$, tenemos que: $\overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$

b) $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} \overset{(1)}{=}$

$= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) \overset{(2)}{=} 0$

(1) $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0 \rightarrow \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$

(2) $\overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$

Por tanto, si $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0$, como $\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB}$, entonces $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$; luego H también pertenece a la altura correspondiente al vértice C. Así, las tres alturas se cortan en el mismo punto, H.

47 **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales y unitarios. Halla el valor del parámetro a para que los vectores $\vec{u} + a\vec{v}$ y $\vec{u} - a\vec{v}$ formen un ángulo de 60°.**

$(\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot a\vec{v} - \vec{u} \cdot a\vec{v} - a\vec{v} \cdot a\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} - a\vec{v} \cdot a\vec{v} = 1 - a^2$

$|\vec{u} + a\vec{v}|^2 = (\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} + a\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot a\vec{v} + a\vec{v} \cdot a\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} + a\vec{v} \cdot a\vec{v} = 1 + a^2$

$|\vec{u} - a\vec{v}|^2 = (\vec{u} - a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot a\vec{v} + a\vec{v} \cdot a\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} + a\vec{v} \cdot a\vec{v} = 1 + a^2$

$$\cos\left(\widehat{(\vec{u} + a\vec{v}), (\vec{u} - a\vec{v})}\right) = \cos 60° = \frac{(\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v})}{|\vec{u} + a\vec{v}|\,|\vec{u} - a\vec{v}|} = \frac{1 - a^2}{\sqrt{1 + a^2}\,\sqrt{1 + a^2}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \rightarrow a = \frac{1}{3}\sqrt{3},\ a = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Autoevaluación

Página 143

1 **a) Halla a, b y c para que se verifique $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ siendo $\vec{u}(1, -1, 0)$, $\vec{v}(0, 1, 2)$, $\vec{w}(-2, 0, 1)$.**

b) ¿Forman una base los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

c) Escribe, si es posible, el vector $\vec{r}(1, 1, 1)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) $a(1, -1, 0) + b(0, 1, 2) + c(-2, 0, 1) = (0, 0, 0)$

Obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a - \quad 2c = 0 \\ -a + b \qquad = 0 \\ 2b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 0,\ b = 0,\ c = 0$$

b) Sí, porque son tres vectores y son linealmente independientes.

c) $$\left.\begin{array}{r} a - \quad 2c = 0 \\ -a + b \qquad = 0 \\ 2b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -\frac{1}{5},\ b = \frac{4}{5},\ c = -\frac{3}{5}$$

$$\vec{r} = -\frac{1}{5}(1, -1, 0) + \frac{4}{5}(0, 1, 2) - \frac{3}{5}(-2, 0, 1)$$

2 **Sean los vectores $\vec{u}(3, -2, \sqrt{3})$ y $\vec{v}(4, -2, -4)$. Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ y el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.**

- $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 4 + 3} = \sqrt{16} = 4$
- $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$
- $cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + (-4) \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 6} = \dfrac{12 + 4 - 4\sqrt{3}}{24} = \dfrac{16 - 4\sqrt{3}}{24} = \dfrac{4 - \sqrt{3}}{6} = 0,3780$

  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\ cos\ (0,3780) = 67°\ 47'\ 26''$
- Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

  $$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{16}(4, -2, -4) = \frac{4 - \sqrt{3}}{9}(4, -2, -4)$$

3 **Dados los vectores $\vec{u}(3, -4, 0)$ y $\vec{v}(m, 0, 7)$:**

a) Halla m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Halla un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

c) Obtén tres vectores unitarios, $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$, que tengan, respectivamente, la misma dirección que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

d) ¿Forman $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{w}'$ una base ortonormal?

a) Como $|\vec{u}| \neq 0$ y $|\vec{v}| \neq 0$, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3m + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 3m = 0 \rightarrow m = 0$

Así, $\vec{v}(0, 0, 7)$.

b) $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

$\vec{w} = (3, -4, 0) \times (0, 0, 7) = (-28, -21, 0)$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$|\vec{v}| = 7$

$|\vec{w}| = 7\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = 7\sqrt{25} = 7 \cdot 5 = 35$

Sean:

$\vec{u}\,' = \frac{1}{5}(3, -4, 0)$ $\quad\quad$ $\vec{u}\,'\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right) // \vec{u}$

$\vec{v}\,' = \frac{1}{7}(0, 0, 7)$ $\quad\quad$ $\vec{v}\,'(0, 0, 1) // \vec{v}$

$\vec{w}\,' = \frac{1}{35}(-28, -21, 0)$ $\quad\quad$ $\vec{w}\,'\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right) // \vec{w}$

$\vec{u}\,', \vec{v}\,', \vec{w}\,'$ tienen módulo 1.

d) $(\vec{u}\,', \vec{v}\,', \vec{w}\,')$ no son coplanarios al ser perpendiculares entre sí. Por tanto, forman una base.

Por ser perpendiculares entre sí y, además, unitarios, la base $(\vec{u}\,', \vec{v}\,', \vec{w}\,')$ es ortonormal.

4 **a) Halla la relación que debe existir entre a y b para que los vectores $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(0, 1, a)$ y $\vec{w}(3, b, 0)$ sean coplanarios.**

b) Para $a = 3$ calcula el valor que debe tener b para que el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sea 10 u³.

a) El volumen del tetraedro que forman debe ser igual a cero.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ 3 & b & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6a - ab + 3 = 0 \rightarrow a(6-b) + 3 = 0 \text{ u}^3 \rightarrow \begin{cases} b \neq 6 \\ a = \dfrac{-3}{6-b} \end{cases}$$

b) $$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & b & 0 \end{vmatrix} = 10 \text{ u}^3$$

$3 \cdot (6 - b) + 3 = 10 \rightarrow b = \frac{11}{3}$

5 **Calcula el valor de m de modo que el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{a}(2, -1, 4)$ y $\vec{b}(0, 3, m)$ sea igual a $3\sqrt{5}$ u².**

Área del triángulo $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{5} \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 6\sqrt{5}$ u²

$|(2, -1, 4) \times (0, 3, m)| = 6\sqrt{5}$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |(-m - 12, -2m, 6)| = \sqrt{(-m-12)^2 + 4m^2 + 36} = \sqrt{5m^2 + 24m + 180}$

$5m^2 + 24m + 180 = (6\sqrt{5})^2 = 180$

$5m^2 + 24m = 0 \rightarrow m = -\frac{24}{5}, \ m = 0$

6 **Halla un vector de módulo 10 que sea perpendicular a (3, –1, 0) y forme un ángulo de 60° con (0, 0, 1).**

Llamamos (x, y, z) al vector buscado.

- Su módulo es 10 $\to$ $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 10 \to x^2+y^2+z^2 = 100$
- Es perpendicular a (3, –1, 0) $\to$ $3x - y = 0$
- Forma un ángulo de 60° con (0, 0, 1):

$$\frac{(0,0,1)\cdot(x,y,z)}{|(0,0,1)|\cdot|(x,y,z)|} = \cos 60° \to \frac{z}{1\cdot 10} = \frac{1}{2} \to 2z = 10 \to z = 5$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=100 \\ 3x-y=0 \\ z=5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=100 \\ y=3x \\ z=5 \end{array}$$

Sustituyendo la 3.ª y 2.ª ecuación en la 1.ª:

$$x^2+9x^2+25=100 \to 10x^2=75 \to x=\pm\sqrt{\frac{15}{2}}$$

Soluciones: $\left(\sqrt{\frac{15}{2}}, 3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{15}{2}}, -3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$

7 **Sea $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcula m para que los vectores $\vec{u} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{v} = m\vec{x} + 2\vec{y}$, $\vec{w} = -3\vec{y} + m\vec{z}$ determinen un tetraedro de volumen 1 u³.**

Suponemos que la base es ortonormal. El volumen del tetraedro es:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & -3 & m \end{vmatrix} = 1 \to m^2 - m = 6 \to m = 3,\ m = -2$$