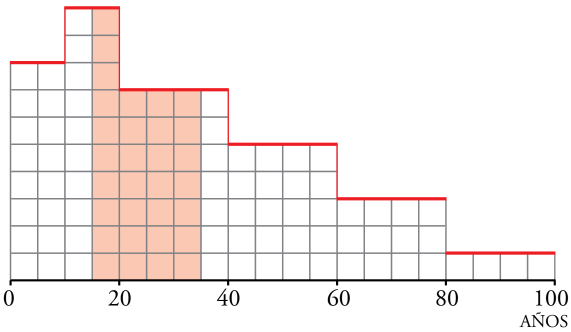
Resuelve

Página 259

Distribución de edades

Las edades de los habitantes de una población se distribuyen según la gráfica adjunta (comprueba que bajo esta gráfica hay, exactamente, 100 cuadraditos).



Si elegimos al azar un habitante de esa población, la probabilidad de que tenga entre 15 y 35 años es del 31 % (compruébalo): $P[15 \le x \le 35] = 0{,}31$

- **Halla las siguientes probabilidades e interpreta lo que significan:**

a) $P[x \le 15]$

b) $P[45 \le x \le 65]$

c) $P[x \le 80]$

d) $P[25 \le x \le 70]$

Contamos los cuadraditos que hay en el intervalo y dividimos por el número total de cuadraditos (que es 100). Así:

a) $P[x \le 15] = \dfrac{26}{100} = 0{,}26$

La probabilidad de que un habitante, elegido al azar en esa población, tenga menos de 15 años es del 26 %.

b) $P[45 \le x \le 65] = \dfrac{18}{100} = 0{,}18$

La probabilidad de que tenga entre 45 y 65 años es del 18 %.

c) $P[x \le 80] = \dfrac{96}{100} = 0{,}96$

La probabilidad de que tenga menos de 80 años es del 96 %.

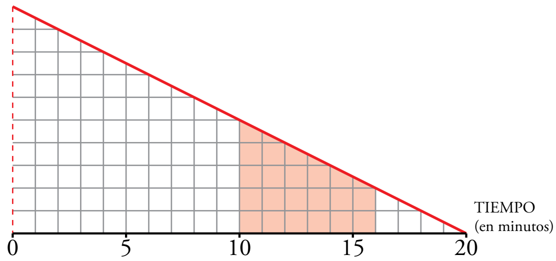
d) $P[25 \le x \le 70] = \dfrac{47}{100} = 0{,}47$

La probabilidad de que tenga entre 25 y 70 años es del 47 %.

Tiempos de espera

El autobús que nos lleva al trabajo es un tanto impuntual. Debe pasar a las 8, pero puede retrasarse hasta 20 minutos. Sin embargo, es más probable que llegue cerca de las 8 h que cerca de las 8 h y 20 min.

Si llegamos a la parada a las 8 en punto, la gráfica adjunta nos ayuda a calcular la probabilidad del tiempo de espera.



La probabilidad de que tengamos que esperar entre 10 y 16 minutos es del 21 % (compruébalo).

Es decir: $P[10 \le x \le 16] = 0{,}21$

■ **Halla e interpreta estas probabilidades:**

a) $P[x \le 2]$

b) $P[5 \le x \le 10]$

c) $P[x \le 10]$

d) $P[5 \le x \le 6]$

a) Tenemos que contar el número de cuadraditos que hay entre las verticales que corresponden a 0 y a 2 y dividirlo entre 100.

$P[x \le 2] = 0{,}19$

El 19 % de las veces tenemos que esperar menos de 2 minutos.

b) $P[5 \le x \le 10] = 0{,}3125$

El 31,25 % de las veces tenemos que esperar entre 5 y 10 minutos.

c) $P[x \le 10] = 0{,}75$

El 75 % de las veces tenemos que esperar menos de 10 minutos.

d) $P[5 \le x \le 6] = 0{,}0725$

El 7,25 % de las veces tenemos que esperar entre 5 y 6 minutos.

1 Distribuciones de probabilidad de variable continua

Página 261

Hazlo tú. Calcula: a) $P[2 \le x \le 5]$ b) $P[2 \le x \le 2{,}5]$

a) $P\,[2 \le x \le 5] = (5-2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

b) $P\,[2 \le x \le 2{,}5] = \frac{0{,}5}{4} = 0{,}125$

Hazlo tú. Calcula:

a) $P[0 \le x \le 2]$ b) $P[3 \le x \le 4]$

a) $P\,[0 \le x \le 2] = \frac{2 \cdot (2/8)}{2} = \frac{2}{8} = 0{,}25$

b) $P\,[3 \le x \le 4] = \frac{(3/8)+(4/8)}{2} \cdot 1 = \frac{7}{16} = 0{,}4375$

1 Calcula k para que $f(x) = \begin{cases} k, & x \in [3, 8] \\ 0, & x \notin [3, 8] \end{cases}$ sea una función de densidad. Halla las probabilidades:

a) $P[4 < x < 6]$ b) $P[2 < x \le 5]$ c) $P[x = 6]$ d) $P[5 < x \le 10]$

Como el área bajo la curva ha de ser igual a 1, tenemos que:

$P[-\infty < x < +\infty] = P[3 \le x \le 8] = 5k = 1 \ \rightarrow\ k = \frac{1}{5}$

a) $P[4 < x < 6] = (6-4) \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

b) $P[2 < x \le 5] = P[3 \le x \le 5] = (5-3) \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

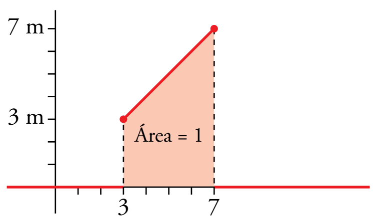
c) $P[x = 6] = 0$

d) $P[5 < x \le 10] = P[5 \le x \le 8] = (8-5) \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

2 Calcula m para que $f(x) = \begin{cases} mx, & x \in [3, 7] \\ 0, & x \notin [3, 7] \end{cases}$ sea una función de densidad. Halla las probabilidades:

a) $P[3 < x < 5]$ b) $P[5 \le x < 7]$ c) $P[4 \le x \le 6]$ d) $P[6 \le x < 11]$

El área bajo la curva (área del trapecio señalado) ha de ser igual a 1:



$$P[-\infty < x < +\infty] = P[3 \le x \le 7] = \frac{(7m+3m)\cdot 4}{5} =$$

$$= 20m = 1 \ \rightarrow\ m = \frac{1}{20}$$

a) $P[3 < x < 5] = \frac{(5/20+3/20)\cdot 2}{2} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

b) $P[5 \le x < 7] = \frac{(7/20+5/20)\cdot 2}{2} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

c) $P[4 \le x \le 6] = \frac{(6/20+4/20)\cdot 2}{2} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

d) $P[6 \le x < 11] = P[6 \le x \le 7] = \frac{(7/20+6/20)\cdot 1}{2} = \frac{13}{40}$

2 La distribución normal

Página 263

1 **En una distribución $N(110, 10)$, calcula:**

a) $P[x > 110]$

b) $P[110 < x < 120]$

c) $P[110 < x < 130]$

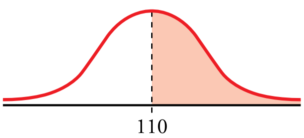
d) $P[120 < x < 130]$

e) $P[90 < x < 100]$

f) $P[90 < x < 120]$

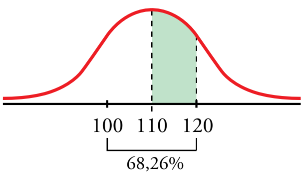
g) $P[x < 100]$

a)



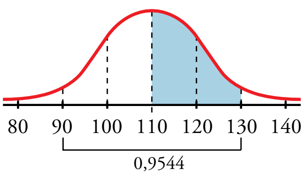
$P[x > 110] = 0{,}5$

b)



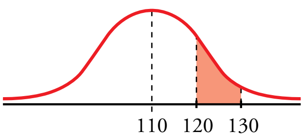
$P[110 < x < 120] = \dfrac{0{,}6826}{2} = 0{,}3413$

c)



$P[110 < x < 130] = \dfrac{0{,}9544}{2} = 0{,}4772$

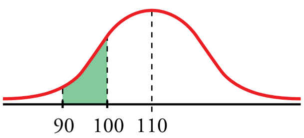
d)



$0{,}9544 - 0{,}6826 = 0{,}2718$

$P[120 < x < 130] = \dfrac{0{,}2718}{2} = 0{,}1359$

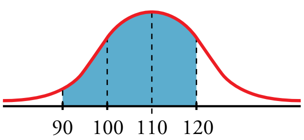
e)



Por simetría, igual que el anterior:

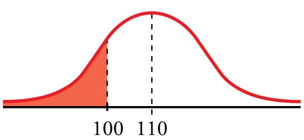
$P[90 < x < 100] = 0{,}1359$

f)



$P[90 < x < 120] = 0{,}6826 + 0{,}1359 = 0{,}8185$

g)



$P[x < 100] = \dfrac{1 - 0{,}6826}{2} = 0{,}1587$

3 Cálculo de probabilidades en distribuciones normales

Página 264

1 Calcula las probabilidades de los apartados a), b) y c) del ejercicio resuelto anterior.

Estima el valor aproximado de las probabilidades d), e) y f) del mismo ejercicio.

a) $P[x > \mu] = 0,5$

b) $P[\mu < x < \mu + 2\sigma] = 0,4772$

c) $P[x < \mu - \sigma] = 0,1587$

d) $P[x < \mu + 0,5\sigma] = 0,6915$

e) $P[x > \mu + 1,75\sigma] = 0,0401$

f) $P[x + 0,5\sigma < x < \mu + 1,75\sigma] = 0,2684$

Página 265

2 Halla las siguientes probabilidades:

a) $P[z \le 0,84]$ **b) $P[z < 1,5]$** **c) $P[z < 2]$** **d) $P[z < 1,87]$**

e) $P[z < 2,35]$ **f) $P[z \le 0]$** **g) $P[z < 4]$** **h) $P[z = 1]$**

Mirando directamente la tabla, obtenemos:

a) 0,7996 b) 0,9332 c) 0,9772 d) 0,9693

e) 0,9906 f) 0,5000 g) 1 h) 0

3 Di el valor de k en cada caso:

a) $P[z \le k] = 0,7019$ **b) $P[z < k] = 0,8997$** **c) $P[z \le k] = 0,5040$** **d) $P[z < k] = 0,7054$**

a) $k = 0,53$ b) $k = 1,28$ c) $k = 0,01$ d) $k = 0,54$

4 Di el valor aproximado de k en cada caso:

a) $P[z < k] = 0,9533$ **b) $P[z \le k] = 0,62$**

a) $k \approx 1,68$ b) $k \approx 0,305$

Página 266

5 Halla:

a) $P[z > 1,3]$ **b) $P[z < -1,3]$** **c) $P[z > -1,3]$** **d) $P[1,3 < z < 1,96]$**

e) $P[-1,96 < z < -1,3]$ **f) $P[-1,3 < z < 1,96]$** **g) $P[-1,96 < z < 1,96]$**

a) $P[z > 1,3] = 1 - P[z < 1,3] = 1 - 0,9032 = 0,0968$

b) $P[z < -1,3] = 1 - P[z < 1,3] = 1 - 0,9032 = 0,0968$

c) $P[z > -1,3] = P[z < 1,3] = 0,9032$

d) $P[1,3 < z < 1,96] = P[z < 1,96] - P[z < 1,3] = 0,9750 - 0,9032 = 0,0718$

e) $P[-1,96 < z < -1,3] = P[z < -1,3] - P[z < -1,96] = (1 - 0,9032) - (1 - 0,9750) = 0,0718$

f) $P[-1,3 < z < 1,96] = P[z < 1,96] - P[z < -1,3] = 0,9750 - (1 - 0,9032) = 0,8782$

g) $P[-1,96 < z < 1,96] = P[z < 1,96] - P[z < -1,96] = (0,9750) - (1 - 0,9750) = 0,95$

6 **Halla, a partir de la tabla, las siguientes probabilidades:**

a) $P[-1 \le z \le 1]$ **b)** $P[-2 \le z \le 2]$

c) $P[-3 \le z \le 3]$ **d)** $P[-4 \le z \le 4]$

e) $P[0 \le z \le 1]$ **f)** $P[0 \le z \le 4]$

a) $P[-1 \le z \le 1] = P[z < 1] - P[z < -1] = 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}6826$

b) $P[-2 \le z \le 2] = P[z < 2] - P[z < -2] = 0{,}9772 - (1 - 0{,}9772) = 0{,}9544$

c) $P[-3 \le z \le 3] = P[z < 3] - P[z < -3] = 0{,}9987 - (1 - 0{,}9987) = 0{,}9974$

d) $P[-4 \le z \le 4] = P[z < 4] - P[z < -4] = 1 - (1 - 1) = 1$

e) $P[0 \le z \le 1] = P[z < 1] - P[z < 0] = 0{,}8413 - 0{,}5 = 0{,}3413$

f) $P[0 \le z \le 4] = P[z < 4] - P[z < 0] = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Página 267

7 **En una distribución $N(173, 6)$, halla las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \le 173]$ **b)** $P[x \ge 180{,}5]$

c) $P[174 \le x \le 180{,}5]$ **d)** $P[161 \le x \le 180{,}5]$

e) $P[161 \le x \le 170]$ **f)** $P[x = 174]$

g) $P[x > 191]$ **h)** $P[x < 155]$

a) $P[x \le 173] = P\left[z < \dfrac{173-173}{6}\right] = P[z < 0] = 0{,}5$

b) $P[x \ge 180{,}5] = 1 - P[x < 180{,}5] = 1 - P\left[z < \dfrac{180{,}5-173}{6}\right] = 1 - P[z < 1{,}25] = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$

c) $P[174 \le x \le 180{,}5] = P[x < 180{,}5] - P[x \le 174] = P\left[z < \dfrac{180{,}5-173}{6}\right] - P\left[z < \dfrac{174-173}{6}\right] =$

$= P[z < 1{,}25] - P[z < 0{,}166] = 0{,}8944 - 0{,}5675 = 0{,}3269$

d) $P[161 \le x \le 180{,}5] = P[x < 180{,}5] - P[x \le 161] = P\left[z < \dfrac{180{,}5-173}{6}\right] - P\left[z < \dfrac{161-173}{6}\right] =$

$= P[z < 1{,}25] - P[z < -2] = P[z < 1{,}25] - (1 - P[z < 2]) =$

$= 0{,}8944 - (1 - 0{,}9772) = 0{,}8716$

e) $P[161 \le x \le 170] = P[x < 170] - P[x \le 161] = P\left[z < \dfrac{170-173}{6}\right] - P\left[z < \dfrac{161-173}{6}\right] =$

$= P[z < -0{,}5] - P[z < -2] = (1 - P[z < 0{,}5]) - (1 - P[z < 2]) =$

$= (1 - 0{,}6915) - (1 - 0{,}9772) = 0{,}2857$

f) $P[x = 174] = 0$

g) $P[x > 191] = 1 - P\left[z < \dfrac{191-173}{6}\right] = 1 - P[z < 3] = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$

h) $P[x < 155] = P\left[z < \dfrac{155-173}{6}\right] = P[z < -3] = 1 - P[z < 3] = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$

4 La distribución binomial se aproxima a la normal

Página 269

1 Calcula las probabilidades de las siguientes distribuciones binomiales mediante su correspondiente aproximación a la normal. En todas ellas, ten en cuenta el ajuste de media unidad que hay que hacer al pasar de una variable discreta a una continua.

a) x **es** $B(100; 0{,}1)$. **Calcula** $P[x = 10]$, $P[x < 2]$ **y** $P[5 < x < 15]$.

b) x **es** $B(1\,000; 0{,}02)$. **Calcula** $P[x > 30]$ **y** $P[x < 80]$.

c) x **es** $B(50; 0{,}9)$. **Calcula** $P[x > 45]$ **y** $P[x \le 30]$.

a) x es $B(100; 0{,}1) \approx x'$ es $N(10; 3)$

$P[x = 10] = P[9{,}5 < x' < 10{,}5] = P[-0{,}17 < z < 0{,}17] = 0{,}135$

$P[x < 2] = P[x' \le 1{,}5] = P[z \le -2{,}83] = 0{,}0023$

$P[5 < x < 15] = P[5{,}5 \le x' \le 14{,}5] = P[-1{,}5 \le z \le 1{,}5] = 0{,}8664$

b) x es $B(1\,000; 0{,}02) \approx x'$ es $N(20; 4{,}427)$

$P[x > 30] = P[x' \ge 30{,}5] = P[z \ge 2{,}37] = 0{,}0089$

$P[x < 80] = P[x' \le 79{,}5] = P[z \le 13{,}44] = 1$

c) x es $B(50; 0{,}9) = x'$ es $N(45; 2{,}12)$

$P[x > 45] = P[x' \ge 45{,}5] = P[z \ge 0{,}24] = 0{,}4052$

$P[x \le 30] = P[x' \le 30{,}5] = P[z \le -6{,}83] = 0$

5 Ajuste de un conjunto de datos a una distribución normal

Página 271

1 La tabla adjunta corresponde a las estaturas de 1400 chicas. Estudia si es aceptable considerar que provienen de una distribución normal.

EXTREMOS DE INTERVALOS	138,5 - 143,5 - 148,5 - 153,5 - 158,5 - 163,5 - 168,5 - 173,5 - 178,5 - 183,5
FRECUENCIAS	2 25 146 327 428 314 124 29 5

Calculamos los parámetros de la distribución:

EXTREMO INF.	EXTREMO SUP.	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
138,5	143,5	141	2	282	39 762
143,5	148,5	146	25	3 650	532 900
148,5	153,5	151	146	22 046	3 328 946
153,5	158,5	156	327	51 012	7 957 872
158,5	163,5	161	428	68 908	11 094 188
163,5	168,5	166	314	52 124	8 652 584
168,5	173,5	171	124	21 204	3 625 884
173,5	178,5	176	29	5 104	898 304
178,5	183,5	181	5	905	163 805
		TOTAL	1 400	225 235	36 294 245

$$\bar{x} = \frac{225\,235}{1\,400} = 160{,}88$$

$$s = \sqrt{\frac{36\,294\,245}{1\,400} - 160{,}88^2} = 6{,}49$$

Consideramos la distribución $N(160{,}88;\ 6{,}49)$.

EXTREMOS DE LOS INTERVALOS x_k	EXTREMOS TIPIFICADOS z_k	$P[z \le z_k]$	$p_k = P[z_k \le z \le z_{k+1}]$	$1\,400 \cdot p_k$	NÚMEROS TEÓRICOS	NÚMEROS OBTENIDOS	|DIFERENCIAS|
138,5	–3,48	0,0003					
143,5	–2,70	0,0035	0,0032	4,48	4	2	2
148,5	–1,92	0,0274	0,0239	33,46	33	25	8
153,5	–1,15	0,1251	0,0977	136,78	137	146	9
158,5	–0,37	0,3557	0,2306	322,84	323	327	4
163,5	0,41	0,6541	0,2984	417,76	418	428	10
168,5	1,18	0,8810	0,2269	317,66	318	314	4
173,5	1,96	0,9750	0,094	131,60	132	124	8
178,5	2,74	0,9969	0,0219	30,66	31	29	2
183,5	3,52	0,9998	0,0029	4,06	4	5	1

Las diferencias son muy pequeñas; podemos admitir la hipótesis de normalidad. Las estaturas de las chicas siguen una distribución normal.

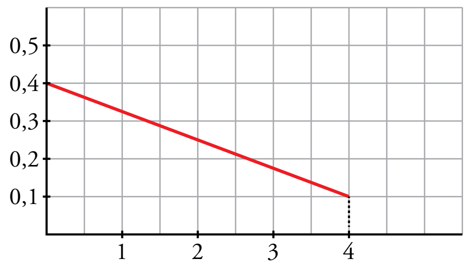
Ejercicios y problemas resueltos

Página 272

1. Función de densidad

Hazlo tú. Halla el valor de k para que $f(x) = 0,4 + kx$, si $x \in [0, 4]$ y 0 en el resto, sea función de densidad. Calcula $P[x \geq 3]$, $P[x \leq 1]$ y $P[1 \leq x \leq 3]$.

$y = 0,4 + k \cdot x$



Para que sea función de densidad, el área del trapecio que forma la recta la recta, el eje OY y la recta $x = 4$ tiene que ser 1.

$$A_{\text{TRAPECIO}} = \frac{0,4 + (0,4 + k \cdot 4)}{2} \cdot 4 = 1 \rightarrow k = -0,075$$

La función de densidad es: $y = 0,4 - 0,075 \cdot x$

Para cada una de las probabilidades que nos piden hallamos el área del correspondiente trapecio:

$$P[x \geq 3] = \frac{(0,4 - 0,075 \cdot 3) + (0,4 - 0,075 \cdot 4)}{2} \cdot (4 - 3) = 0,1375$$

$$P[x \leq 1] = \frac{(0,4 - 0,075 \cdot 0) + (0,4 - 0,075 \cdot 1)}{2} \cdot (1 - 0) = 0,3625$$

$$P[1 \leq x \leq 3] = \frac{(0,4 - 0,075 \cdot 1) + (0,4 - 0,075 \cdot 3)}{2} \cdot (3 - 1) = 0,5$$

2. Manejo de la tabla de la $N(0, 1)$

Hazlo tú. Calcula $P[-0,83 < z < 0,83]$.

$P[-0,83 < z < 0,83] = P[z < 0,83] - P[z < -0,83] = 0,7967 - (1 - 0,7967) = 0,5934$

Página 273

4. Aproximación de la binomial a la normal

Hazlo tú. a) En el primer apartado hemos tomado diciembre como 1/12 del año. Halla la misma probabilidad tomando diciembre como 31 días de los 365 días del año.

b) ¿Qué probabilidad hay de que al menos 5 alumnos hayan nacido un domingo?

a) Se trata de una distribución binomial $B\left(30, \frac{31}{365}\right) = B(30; 0{,}85)$.

$np = 30 \cdot 0{,}085 = 2{,}55 < 3$

$1 - 0{,}085 = 0{,}915$

$P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}915^{30} = 0{,}93040$

b) Se trata de una distribución binomial $B\left(30, \frac{1}{7}\right) = B(30; 0{,}143)$

$np = 30 \cdot 0{,}143 = 4{,}29 > 3 \rightarrow$ Podemos aproximar la distribución binomial por una normal.

$\mu = 4{,}29$

$\sigma = \sqrt{4{,}29 \cdot 0{,}143 \cdot (1 - 0{,}143)} = 0{,}73$

x es $B(30; 0{,}143) \rightarrow x'$ es $N(4{,}29; 0{,}73)$

La probabilidad que nos piden es:

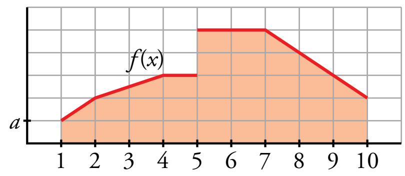
$$P[x \geq 5] = P[x' > 4{,}5] = P\left[z > \frac{4{,}5 - 4{,}29}{0{,}73}\right] = P[z > 0{,}29] = 1 - P[z < 0{,}29] = 1 - 0{,}6141 = 0{,}3859$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 274

1. Funciones de densidad

a) Calcular el valor de a para que f(x) sea función de densidad.



b) Hallar las siguientes probabilidades:

P[x < 4]	***P[4 < x < 9]***
P[1 < x < 10]	***P[x = 6]***
P[0 < x < 2]	***P[7 < x < 15]***

a) Calculamos las cinco áreas por separado (son trapecios o rectángulos). Las llamamos, de izquierda a derecha, A, B, C, D y E.

Área de la región A = $\dfrac{a+2a}{2}\cdot 1=\dfrac{3}{2}a$

Área de la región B = $\dfrac{2a+3a}{2}\cdot 2 = 5a$

Área de la región C = $3a \cdot 1 = 3a$

Área de la región D = $5a \cdot 2 = 10a$

Área de la región E = $\dfrac{5a+2a}{2}\cdot 3=\dfrac{21}{2}a$

La suma de las cinco áreas tiene que valer 1:

$$\frac{3}{2}a+5a+3a+10a+\frac{21}{2}a = 1 \ \rightarrow\ a = \frac{1}{30}$$

b) $P[x<4] = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{30}+5\cdot\dfrac{1}{30}=\dfrac{13}{60}=0,22$

$P[4<x<9] = 3\cdot\dfrac{1}{30}+10\cdot\dfrac{1}{30}+\dfrac{21}{2}\cdot\dfrac{1}{30}=\dfrac{47}{60} = 0,78$

$P[1<x<10] = 1$

$P[x=6] = 0$

$P[0<x<2] = P[1<x<2] = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{30}=\dfrac{1}{20} = 0,05$

$P[7<x<15] = P[7<x<10] = \dfrac{21}{2}\cdot\dfrac{1}{30}=\dfrac{7}{20} = 0,35$

2. Tipificación

En una cierta prueba, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0,8 y –0,4 y sus notas reales fueron 88 y 64 puntos, respectivamente. ¿Cuál es la media y cuál la desviación típica de las puntuaciones del examen?

$$\begin{cases}\dfrac{88-\mu}{\sigma}=0,8\\[2ex] \dfrac{64-\mu}{\sigma}=-0,4\end{cases} \rightarrow \begin{cases}88-\mu=0,8\sigma\\ 64-\mu=-0,4\sigma\end{cases} \rightarrow \sigma = 20,\ \mu = 72$$

3. Ajuste de una distribución empírica a una normal

Un científico ha tomado medidas de la longitud de 1 000 ranas de una determinada especie. Los resultados están en la siguiente tabla:

LONGITUD (EN cm)	N.° DE RANAS
(10, 12]	**25**
(12, 14]	**228**
(14, 16]	**475**
(16, 18]	**240**
(18, 20]	**32**
TOTAL	**1 000**

Comprueba si los resultados se ajustan a una distribución normal.

MARCA DE CLASE	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
11	25	275	3 025
13	228	2 964	38 532
15	475	7 125	106 875
17	240	4 080	69 360
19	32	608	11 552
TOTAL	1 000	15 052	229 344

$$\bar{x} = \frac{15{,}052}{1000} \approx 15{,}1$$

$$s = \sqrt{\frac{229\,344}{1000} - 15{,}1^2} \approx 1{,}67$$

Consideramos la distribución $N(15{,}1;\ 1{,}67)$

EXTREMOS DE LOS INTERVALOS x_k	EXTREMOS TIPIFICADOS z_k	$P[z \le z_k]$	$p_k = P[z_k \le z \le z_{k+1}]$	$1\,000 \cdot p_k$	NÚMEROS TEÓRICOS	NÚMEROS OBTENIDOS	|DIFERENCIAS|
10	–3,05	0,0011					
12	–1,86	0,0314	0,0303	30,3	31	25	6
14	–0,66	0,2546	0,2232	223,2	224	228	4
16	0,54	0,7054	0,4508	450,8	451	475	24
18	1,74	0,9591	0,2537	253,7	254	240	14
20	2,93	0,9985	0,0394	39,4	40	32	8

Las diferencias son muy pequeñas; podemos admitir la hipótesis de normalidad. Las longitudes de las ranas estudiadas siguen una distribución normal.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 275

Para practicar

Función de densidad

1 Justifica si pueden ser funciones de densidad las siguientes:

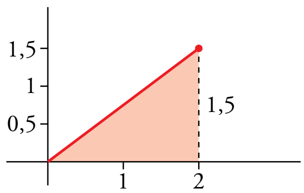
a) $f(x) = 0{,}5 + 0{,}5x$ **con** $x \in [0, 2]$

b) $f(x) = 0{,}5 - x$ **con** $x \in [0, 2]$

c) $f(x) = 1 - 0{,}5x$ **con** $x \in [0, 2]$

Veamos, en cada caso, si el área encerrada bajo la curva es 1:

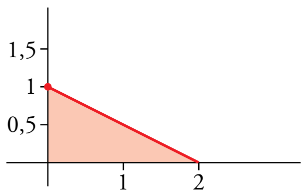
a)



$\text{Área} = \dfrac{1{,}5 \cdot 2}{2} = 1{,}5 \rightarrow$ No puede ser función de densidad.

b) $f(2) = -1{,}5 < 0 \rightarrow$ No puede ser función de densidad, pues tendría que ser $f(x) \geq 0$.

c)



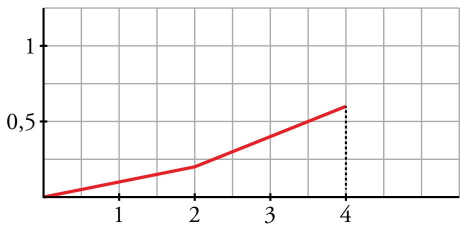
$\left.\begin{array}{l}\text{Área} = \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1 \\ f(x) \geq 0\end{array}\right\} \rightarrow$ Sí puede ser función de densidad.

2 Halla el valor de k **para que esta función sea de densidad:**

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2k(x-1) & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Halla estas probabilidades:

$$P[1 \leq x \leq 3], \; P[x \leq 3], \; P[0 \leq x \leq 7]$$



Calculamos las dos áreas por separado (son triángulos o trapecios):

Área de la región hasta $x = 2 \rightarrow \dfrac{2k}{2} \cdot 2 = 2k$

Área de la región desde $x = 2$ hasta $x = 4 \rightarrow \dfrac{2k \cdot 1 + 2k \cdot 3}{2} \cdot 2 = 8k$

La suma de las áreas tiene que valer 1 $\rightarrow 2k + 8k = 1 \rightarrow k = \dfrac{1}{10}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{5}(x-1) & \text{si } 2 < x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$P[1 \le x \le 3] = P[1 \le x \le 2] + P[2 < x \le 3] = \frac{\frac{1}{10} + \frac{2}{10}}{2} \cdot 1 + \frac{\frac{2}{10} \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot 2}{2} \cdot 1 = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

$$P[x \le 3] = P[0 \le x \le 2] + P[2 < x \le 3] = \frac{\frac{2}{10}}{2} \cdot 2 + \frac{\frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

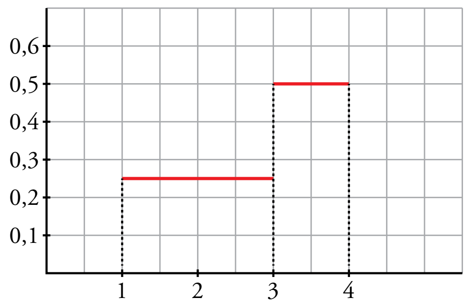
$$P[0 \le x \le 7] = P[0 \le x \le 4] = 1$$

3 Calcula el valor de a para que esta función sea de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } 1 \le x \le a \\ 1/2 & \text{si } a < x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcula, además, las siguientes probabilidades:

$$P[1 \le x \le 2],\ P[x \le 3],\ P[x > 2]$$



Calculamos las dos áreas por separado (son rectángulos):

Área de la región hasta $x = 3 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot (a - 1)$

Área de la región desde $x = 3$ hasta $x = 4 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (4 - a)$

La suma de las áreas tiene que valer 1 $\rightarrow \frac{1}{4} \cdot (a - 1) + \frac{1}{2} \cdot (4 - a) = 1 \rightarrow a = 3$

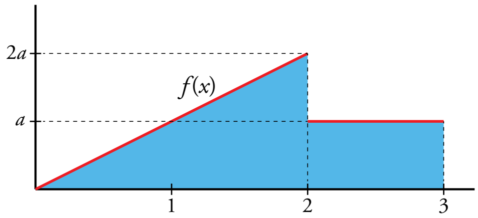
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 3 < x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$P[1 \le x \le 2] = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$P[x \le 3] = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$P[x > 2] = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

4 **Calcula el valor de *a* para que la siguiente gráfica sea una representación de una función de densidad. Escribe su expresión analítica:**



Calculamos las dos áreas por separado (son triángulos o rectángulos):

Área de la región hasta $x = 2 \rightarrow \frac{2a}{4} \cdot 2 = a$

Área de la región desde $x = 2$ hasta $x = 3 \rightarrow a$

La suma de las áreas tiene que valer 1 $\rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 2 < x \le 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Manejo de la tabla *N*(0, 1)

5 **En una distribución *N*(0, 1), calcula estas probabilidades:**

a) $P[z = 2]$ **b)** $P[z \le 2]$ **c)** $P[z \ge 2]$

d) $P[z \le -2]$ **e)** $P[z \ge -2]$ **f)** $P[-2 \le z \le 2]$

a) $P[z = 2] = 0$

b) $P[z \le 2] = 0{,}9772$

c) $P[z \ge 2] = 1 - 0{,}9792 = 0{,}0228$

d) $P[z \le -2] = 0{,}0228$

e) $P[z \ge -2] = 1 - 0{,}0228 = 0{,}9772$

f) $P[-2 \le z \le 2] = 2(P[z \le 2] - 0{,}5) = 0{,}9544$

6 **En una distribución *N*(0, 1), calcula:**

a) $P[z \le 1{,}83]$ **b)** $P[z \ge 0{,}27]$ **c)** $P[z \le -0{,}87]$ **d)** $P[z \ge 2{,}5]$

a) $P[z \le 1{,}83] = 0{,}9664$

b) $P[z \ge 0{,}27] = 0{,}3935$

c) $P[z \le -0{,}87] = 0{,}1922$

d) $P[z \ge 2{,}5] = 0{,}0062$

7 **En una distribución *N*(0, 1), calcula estas probabilidades:**

a) $P[z = 1{,}6]$ **b)** $P[-2{,}71 \le z \le -1{,}83]$

c) $P[1{,}5 \le z \le 2{,}5]$ **d)** $P[-1{,}87 \le z \le 1{,}25]$

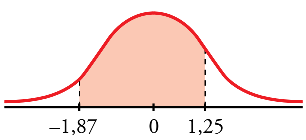
a) $P[z = 1{,}6] = 0$

b) $P[-2{,}71 \le z \le -1{,}83] = P[1{,}83 \le z \le 2{,}71] = P[z \le 2{,}71] - P[z \le 1{,}83] = 0{,}0302$

c) $P[1{,}5 \le z \le 2{,}5] = P[z \le 2{,}5] - P[z \le 1{,}5] = 0{,}0606$

d) $P[-1{,}87 \le z \le 1{,}25] = P[z \le 1{,}25] - P[z \le -1{,}87] = P[z \le 1{,}25] - P[z \ge 1{,}87] =$

$= P[z \le 1{,}25] - (1 - P[z < 1{,}87]) = 0{,}8637$



8 **Calcula k en cada uno de los siguientes casos:**

a) $P[z < k] = 0{,}8365$ **b)** $P[z > k] = 0{,}8365$ **c)** $P[z < k] = 0{,}1894$ **d)** $P[-k < z < k] = 0{,}95$

a) $k = 0{,}98$ b) $k = -0{,}98$ c) $k = -0{,}88$ d) $k = 1{,}96$

Tipificación

9 **En un examen tipo test, la media fue 28 puntos y la desviación típica, 10 puntos. Calcula la puntuación tipificada en los alumnos que obtuvieron:**

a) 38 puntos **b) 14 puntos** **c) 45 puntos** **d) 10 puntos**

$\mu = 28; \ \sigma = 10$

a) $\dfrac{38-28}{10} = 1$ b) $\dfrac{14-28}{10} = -1{,}4$ c) $\dfrac{45-28}{10} = 1{,}7$ d) $\dfrac{10-28}{10} = -1{,}8$

10 **Si en el examen del problema anterior la puntuación tipificada de un alumno fue 0,8, ¿cuántos puntos obtuvo? ¿Cuántos puntos corresponden al valor tipificado de –0,2?**

$0{,}8 \rightarrow 0{,}8 \cdot 10 + 28 = 36$

$-0{,}2 \rightarrow -0{,}2 \cdot 10 + 28 = 26$

11 **Los pesos de un grupo de elefantes machos adultos tienen una media de 6 toneladas. Si el peso tipificado de un ejemplar de 7 000 kg es 0,625, ¿cuál es la desviación típica de la población? ¿Qué tipificación corresponde a un peso de 5 200 kg?**

$\dfrac{7\,000-6\,000}{\sigma} = 0{,}625 \rightarrow \sigma = 1\,600$

Para un peso de 5 200 kg $\rightarrow \dfrac{5\,200-6\,000}{1600} = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$

Cálculo de probabilidades en $N(\mu, \sigma)$

12 **En una distribución $N(43, 10)$, calcula cada una de estas probabilidades:**

a) $P[x \ge 43]$ **b)** $P[x \le 30]$ **c)** $P[40 \le x \le 55]$ **d)** $P[30 \le x \le 40]$

a) $P[x \ge 43] = 0{,}5$

b) $P[x \le 30] = P\left[z \le \dfrac{30-43}{10}\right] = P[z \le -1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

c) $P[40 \le x \le 55] = P\left[\dfrac{40-43}{10} \le z \le \dfrac{55-43}{10}\right] = P[-0{,}3 \le z \le 1{,}2] = 0{,}5028$

d) $P[30 \le x \le 40] = P[-1{,}3 \le z \le -0{,}3] = P[0{,}3 \le z \le 1{,}3] = P[z \le 1{,}3] - P[z \le 0{,}3] =$

$= 0{,}9032 - 0{,}6179 = 0{,}2853$

13 **En una distribución $N(151, 15)$, calcula:**

a) $P[x \le 136]$ **b)** $P[120 \le x \le 155]$ **c)** $P[x \ge 185]$ **d)** $P[140 \le x \le 160]$

a) $P[x \le 136] = P\left[z \le \dfrac{136-151}{15}\right] = P[z \le -1] = P[z \le 1] = 1 - P[z < 1] = 0{,}1587$

b) $P[120 \le x \le 155] = P[2{,}07 \le z \le 0{,}27] = 0{,}5873$

c) $P[x \ge 185] = P[z \ge 2{,}27] = 0{,}0116$

d) $P[140 \le x \le 160] = P[-0{,}73 \le z \le 0{,}6] = 0{,}5149$

14 **En una distribución $N(22, 5)$, calcula:**

a) $P[x \le 27]$

b) $P[x \ge 27]$

c) $P[x \ge 12{,}5]$

d) $P[15 \le x \le 20]$

e) $P[15 \le x \le 27]$

f) $P[12{,}5 \le x \le 15]$

a) $P[x \le 27] = P[z \le 1] = 0{,}8413$

b) $P[x \ge 27] = 0{,}1587$

c) $P[x \ge 12{,}5] = P[z \le 1{,}9] = 0{,}9713$

d) $P[15 \le x \le 20] = P[-1{,}4 \le z \le -0{,}4] = 0{,}2638$

e) $P[15 \le x \le 27] = P[-1{,}4 \le z \le 1] = 0{,}7605$

f) $P[12{,}5 \le x \le 15] = P[-1{,}9 \le z < -1{,}4] = 0{,}0521$

Binomial → Normal

15 **Si lanzamos un dado mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de cincos obtenidos sea menor que 100?**

x es $B(1\,000;\ 0{,}1667) \to x'$ es $N(166{,}67;\ 11{,}79)$

$P[x < 100] = P[x' \le 99{,}5] = P[z \le -5{,}70] = 0$

16 **Una moneda se lanza 400 veces. Calcula la probabilidad de que el número de caras:**

a) **sea mayor que 200.**

b) **esté entre 180 y 220.**

$np = nq = 400 \cdot 0{,}5 = 200 > 5$

Se aproxima de forma casi perfecta por una normal.

$\mu = 200,\ \sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 10 \to N(200, 10)$

a) $P[x > 200] = P[x' \ge 200{,}5] = P\left[z \ge \dfrac{200{,}5 - 200}{10}\right] = P[z \ge 0{,}05] = 1 - 0{,}5199 = 0{,}4801$

b) $P[180 \le x \le 220] = P[179{,}5 \le x' \le 220{,}5] =$

$$= P[179{,}5 \le x' \le 220{,}5] + P\left[\frac{179{,}5 - 200}{10} \le x' \le \frac{220{,}5 - 200}{10}\right] =$$

$$= P[-2{,}05 \le x' \le 2{,}05] = 0{,}9798 - (1 - 0{,}9798) = 0{,}9596$$

17 **Se lanza 2 000 veces un dado de 12 caras. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 180 unos?**

$x \to$ número de unos. x sigue una distribución $B\left(2\,000, \dfrac{1}{12}\right) = B(2\,000;\ 0{,}083)$

$np = 2\,000 \cdot 0{,}083 = 166 > 5$

$nq = 2\,000 \cdot (1 - 0{,}083) = 1\,834 > 5$

$\sqrt{npq} = \sqrt{2\,000 \cdot 0{,}083 \cdot (1 - 0{,}083)} = 12{,}34$

Se aproxima de forma casi perfecta por una normal.

$\mu = 166,\ \sigma = 12{,}34 \to N(166;\ 12{,}34)$

$P[x \ge 180] = P[x' \ge 179{,}5] = P\left[z \ge \dfrac{179{,}5 - 180}{12{,}34}\right] = P[z \ge -0{,}04] = 0{,}5060$

Página 276

Para resolver

18 El tiempo necesario para que una ambulancia llegue a un centro deportivo se distribuye según una variable normal de media 17 minutos y desviación típica 3 minutos.

Calcula la probabilidad de que el tiempo de llegada esté comprendido entre 13 minutos y 21 minutos.

x es $N(17, 3)$

$P[13 < x < 21] = P[-1{,}33 < z < 1{,}33] = 0{,}8164$

19 La talla media de las 200 alumnas de un centro escolar es de 165 cm, y la desviación típica, de 10 cm.

Si las tallas se distribuyen normalmente, calcula la probabilidad de que una alumna elegida al azar mida más de 180 cm.

¿Cuántas alumnas puede esperarse que midan más de 180 cm?

$x \to$ Talla. Sigue una normal $N(165, 10)$.

$$P[x > 180] = P\left[z \geq \frac{180-165}{10}\right] = P[z \geq 1{,}5] = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

$0{,}0668 \cdot 200 = 13{,}36$

Se espera que haya 13 alumnas que midan más de 180 cm.

20 Para aprobar un examen de ingreso en una escuela, se necesita obtener 50 puntos o más. Por experiencia de años anteriores, sabemos que la distribución de puntos obtenidos por los alumnos es normal, con media 55 puntos y desviación típica 10.

a) ¿Qué probabilidad hay de que un alumno apruebe?

b) Si se presentan al examen 400 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que ingresen en esa escuela?

$x \to$ Puntos. Sigue una normal $N(55, 10)$.

a) $P[x > 50] = P\left[z \geq \dfrac{50-55}{10}\right] = P[z \geq -0{,}5] = 0{,}6915$

b) $0{,}6915 \cdot 400 = 276{,}6$

Se espera que ingresarán 277 alumnos.

21 En una ciudad, las temperaturas máximas diarias durante el mes de julio se distribuyen normalmente con una media de 26 °C y una desviación típica de 4 °C. ¿Cuántos días se puede esperar que tengan una temperatura máxima comprendida entre 22 °C y 28 °C?

$x \to$ Temperatura. Sigue una normal $N(26, 4)$.

a) $P[22 \leq x \leq 28] = P\left[\dfrac{22-26}{4} \leq z \leq \dfrac{28-26}{4}\right] = P[-1 \leq z \leq 0{,}5] =$

$= P[z \leq 0{,}5] - P[z \leq -1] = 0{,}5 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}3413$

b) Como julio tiene 31 días, $0{,}3413 \cdot 31 = 10{,}58$.

Se espera que 11 días del mes tengan una temperatura máxima entre 22 °C y 28 °C.

22 **Para iluminar el recinto de un estadio deportivo se quieren instalar focos. El suministrador asegura que el tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 1 500 h y desviación típica de 200 h.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un foco elegido al azar luzca por lo menos 1 000 horas?

b) Si se compran 2 000 focos, ¿cuántos puede esperarse que luzcan al menos 1 000 horas?

$x \to$ Tiempo de vida. Sigue una normal $N(1\,500, 200)$.

a) $P[x \geq 1\,000] = P\left[z \geq \frac{1000-1500}{200}\right] = P[z \geq -2{,}5] = 0{,}9938$

b) $0{,}9938 \cdot 1\,000 = 993{,}8$

Se espera que 994 focos duren, al menos, 1 000 horas.

23 **Los pesos de 2 000 soldados presentan una distribución normal de media 75 kg y desviación típica 8 kg. Halla la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:**

a) más de 71 kg. **b) entre 73 y 79 kg.** **c) menos de 80 kg.** **d) más de 85 kg.**

$x \to$ Peso. Sigue una normal $N(75, 8)$.

a) $P[x \geq 71] = P\left[z \geq \frac{71-75}{8}\right] = P[z \geq -0{,}5] = 0{,}6915$

b) $P[73 \leq x \leq 79] = P\left[\frac{73-75}{8} \leq z \leq \frac{79-75}{8}\right] = P[-0{,}25 \leq z \leq 0{,}5] = 0{,}6915 - (1 - 0{,}5987) = 0{,}2902$

c) $P[x \leq 80] = P\left[z \leq \frac{80-75}{8}\right] = P[z \leq 0{,}625] = 0{,}7324$

d) $P[x \geq 85] = P\left[z \geq \frac{85-75}{8}\right] = P[z \geq 1{,}25] = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$

24 **La duración de cierto tipo de motor es una variable normal con una media de 10 años y desviación típica de 2 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de los motores por un periodo de 13 años. ¿Qué porcentaje de motores se espera que no cumplan la garantía?**

$x \to$ Duración del motor. Sigue una normal $N(10, 2)$.

$P[x \geq 13] = P\left[z \geq \frac{13-10}{8}\right] = P[z \geq 0{,}375] = 1 - 0{,}6443 = 0{,}3557$

El 35,6 % de los motores no cumplirán la garantía.

25 **El 20 % de los alumnos con mejor nota de una escuela pueden acceder a estudios superiores. Sabemos que las notas medias finales en esa escuela se distribuyen normalmente con media 5,8 y desviación típica 2. ¿Cuál es la nota media mínima que debe obtener un alumno si quiere hacer estudios superiores?**

$x \to$ Nota. Sigue una normal $N(5{,}8; 2)$.

$P[x \geq k] = P\left[z \geq \frac{k-5{,}8}{2}\right] = P\left[z \leq \frac{k-5{,}8}{2}\right] = 0{,}8$

$\frac{k-5{,}8}{2} = 0{,}85 \to k = 7{,}5$

La nota media mínima que debe obtener un alumno, si quiere hacer estudios superiores, es de 7,5 puntos.

26 **Un test de sensibilidad musical da resultados que se distribuyen según una $N(65, 18)$.**

Se quiere hacer un baremo por el cual, a cada persona, junto con la puntuación obtenida, se le asigne uno de los siguientes comentarios:

- **duro de oído,**
- **poco sensible a la música,**
- **normal,**
- **sensible a la música,**
- **extraordinariamente dotado para la música,**

de modo que haya en cada uno de los grupos, respectivamente, un 10 %, un 35 %, un 30 %, un 20 % y un 5 % del total de individuos observados.

a) ¿En qué puntuaciones pondrías los límites entre los distintos grupos?

b) ¿Qué comentario se le haría a una persona que obtuviera una puntuación de 80? ¿Y a otra que obtuviera una puntuación de 40?

a) x sigue una normal $N(65, 18)$.

- Duro de oído

$$P[x \le k] = P\left[z \le \frac{k-65}{18}\right] = 0,1 = 1 - 0,9$$

$$\frac{k-65}{18} = -1,285 \rightarrow k = 41,87$$

- Poco sensible a la música

$$P[x \le k] = P\left[z \le \frac{k-65}{18}\right] = 0,35 + 0,1 = 0,45 = 1 - 0,55$$

$$\frac{k-65}{18} = -0,125 \rightarrow k = 62,75$$

- Normal

$$P[x \le k] = P\left[z \le \frac{k-65}{18}\right] = 0,45 + 0,3 = 0,75$$

$$\frac{k-65}{18} = 0,675 \rightarrow k = 77,15$$

- Sensible a la música

$$P[x \le k] = P\left[z \le \frac{k-65}{18}\right] = 0,75 + 0,2 = 0,95$$

$$\frac{k-65}{18} = 1,645 \rightarrow k = 94,61$$

Puntuación menor que 41,87 $\rightarrow$ Duro de oído.

Entre 41,87 y 62,75 $\rightarrow$ Poco sensible a la música.

Entre 62,75 y 77,15 $\rightarrow$ Normal.

Entre 77,15 y 94,61 $\rightarrow$ Sensible a la música.

Más de 94,61 $\rightarrow$ Extraordinariamente dotado para la música.

b) 80 $\rightarrow$ Sensible a la música.

40 $\rightarrow$ Duro de oído.

27 **En una población de estudiantes se ha comprobado que la calificación obtenida en inglés sigue una distribución normal de media 5, si se ha seguido el método A, y una normal de media 6, si se ha seguido el método B.**

Se sabe que el 4 % de los alumnos que han seguido el método A obtienen una calificación inferior a 3,5 y que el 2 % de los alumnos que han seguido el método B superan el 8.

a) ¿Qué porcentaje de estudiantes que siguen el método A no superan la calificación de 6,5?

b) ¿Qué porcentaje de estudiantes del método B obtienen una calificación comprendida entre 4 y 6?

a) $x \to$ calificación en A.

La distribución normal es simétrica respecto de su media.

Como $\mu = 5 \to P[x \le 3{,}5] = P[x \ge 6{,}5] = 0{,}04$

Por tanto, el porcentaje de estudiantes que siguen el método A y no superan la calificación de 6,5 es del 4 %.

b) $x \to$ calificación en B.

La distribución normal es simétrica respecto de su media.

Como $\mu = 6 \to P[4 \le x \le 6] = P[6 \le x \le 8] = P[x \le 8] - P[x \le 6] = (1 - 0{,}02) - 0{,}5 = 0{,}48$

Por tanto, el porcentaje de estudiantes del método B que obtienen una calificación comprendida entre 4 y 6 es del 48 %.

28 **En un examen psicotécnico, las notas de Brianda y Christian fueron, respectivamente, 84 y 78. Sabemos que esas puntuaciones tipificadas son 1,75 y 1 respectivamente. Calcula la media y la desviación típica de la distribución.**

$x \to$ calificación. Sigue una normal $N(\mu, \sigma)$.

μ, σ son la solución del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{84-\mu}{\sigma} = 1{,}75 \\[2ex] \dfrac{78-\mu}{\sigma} = 1 \end{array}\right\} \to \mu = 70,\ \ \sigma = 8$$

29 **Las alturas de los alumnos de una clase sig,uen una $N(\mu, \sigma)$. Sonia, con 172 cm, y Begoña, con 167 cm, tienen unas alturas tipificadas de 1,4 y 0,4, respectivamente.**

a) ¿Cuál es la altura real de Estefanía si su altura tipificada es de –1?

b) ¿Cuál es la tipificación de la altura de Azucena si mide 165 cm?

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{172-\mu}{\sigma} = 1{,}4 \\[2ex] \dfrac{167-\mu}{\sigma} = 0{,}4 \end{array}\right\} \to \mu = 165,\ \ \sigma = 5$$

a) $\dfrac{x-165}{5} = -1 \to x = 160$

Estefanía mide 160 cm.

b) Es la media, luego su tipificación es 0.

Página 277

30 **El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45 mm.**

a) Determina su desviación típica sabiendo que la probabilidad de que una pieza tenga un diámetro mayor que 50 mm es igual a 0,0062.

b) Si se analizan 820 piezas, ¿cuántas se estima que tendrán un diámetro comprendido entre 39,7 y 43,5 mm?

a) $P[x \ge 50] = 0{,}0062$

$$P[x \ge 50] = P\left[z \ge \frac{50-45}{\sigma}\right] = P\left[z \ge \frac{5}{\sigma}\right] = 0{,}0062$$

$$P\left[z \le \frac{5}{\sigma}\right] = 1 - 0{,}0062 = 0{,}9938 \;\to\; \frac{5}{\sigma} = 2{,}5 \;\to\; \sigma = 2$$

b) $P[39{,}7 \le x \le 43{,}5] = P\left[\frac{39{,}7-45}{2} \le z \le \frac{43{,}5-45}{2}\right] = P[-2{,}65 \le z \le -0{,}75] =$

$= P[z \le -0{,}75] - P[z \le -2{,}65] = (1 - 0{,}7734) - (1 - 0{,}9960) = 0{,}2226$

Como hay 820 piezas, $820 \cdot 0{,}2226 = 182{,}53$

Se estima que 183 piezas tendrán un diámetro comprendido entre 39,7 mm y 43,5 mm.

31 **Una compañía de autobuses sabe que el retraso en la llegada sigue una distribución normal de media 5 min, y que el 68,26 % de los autobuses llega entre 2 y 8 minutos tarde.**

a) ¿Cuál es la desviación típica?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue puntual o antes de la hora?

a) $P[2 \le x \le 8] = P\left[\frac{2-5}{\sigma} \le z \le \frac{8-5}{\sigma}\right] = P\left[-\frac{3}{\sigma} \le z \le \frac{3}{\sigma}\right] = P\left[z \le \frac{3}{\sigma}\right] - P\left[z \le -\frac{3}{\sigma}\right] =$

$$= P\left[z \le \frac{3}{\sigma}\right] - \left(1 - P\left[z \le \frac{3}{\sigma}\right]\right) = 2P\left[z \le \frac{3}{\sigma}\right] - 1 = 0{,}6826$$

$$P\left[z \le \frac{3}{\sigma}\right] = \frac{1+0{,}6826}{2} = 0{,}8413 \;\to\; \frac{3}{\sigma} = 1 \;\to\; \sigma = 3$$

b) $P[x \le 0] = P\left[z \le \frac{-5}{3}\right] = P[z \le -1{,}6667] = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$

32 **En un bombo de lotería tenemos 10 bolas numeradas del 0 al 9. Cada vez que se extrae una, se devuelve al bombo. Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 0 salga más de 12 veces.**

$x \to$ número de ceros. Sigue una binomial $B(100;\, 0{,}1)$.

$np = 10 > 5$

$nq = 90 > 5$

Se puede aproximar por una normal.

$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$

x' sigue una normal $N(10, 3)$.

$$P[x \ge 12] = P[x' \ge 11{,}5] = P\left[z \ge \frac{11{,}5-10}{3}\right] = P[z \ge 0{,}5] = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$$

33 **Un juego consiste en lanzar tres dados. Ganas si obtienes tres resultados distintos y la suma de los dos menores es igual al mayor. ¿Qué probabilidad hay de ganar al menos 100 veces de 600 partidas?**

Los casos favorables son: (1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 6) y cada uno de estos casos se puede conseguir de 3! = 6 formas distintas.

Por tanto:

$$P[\text{ganar}] = \frac{36}{6^3} = \frac{1}{6}$$

$x \longrightarrow$ número de partidas ganadas. Sigue una binomial $B\left(600, \frac{1}{6}\right)$.

$$np = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100 > 5$$

$$nq = 600 \cdot \frac{5}{6} = 500 > 5$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 9{,}13$$

x se puede aproximar por una normal $N(100; 9{,}13)$.

$$P[x \geq 100] = P[x' \geq 99{,}5] = P\left[z \geq \frac{99{,}5 - 100}{9{,}13}\right] = P[z \geq -0{,}0548] = P[z \leq 0{,}0548] = 0{,}5199$$

34 **En un hospital, el 54% de los nacimientos son niñas. Halla la probabilidad de que de 2 500 nacimientos, el número de niños esté entre 1 200 y 1 400, ambos inclusive.**

$x \longrightarrow$ número de niños. Sigue una binomial $B(2\,500; 0{,}46)$.

$$np = 2\,500 \cdot 0{,}46 = 1\,150 > 5$$

$$nq = 2\,500 \cdot 0{,}54 = 1\,350 > 5$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{2\,500 \cdot 0{,}46 \cdot 0{,}54} = 24{,}92$$

x se puede aproximar por una normal $N(1\,150; 24{,}92)$.

$$P[1\,200 \leq x \leq 1\,400] = P[1\,199{,}5 \leq x' \leq 1\,400{,}5] = P\left[\frac{1199{,}5 - 1150}{24{,}92} \leq z \leq \frac{1\,400{,}5 - 1150}{24{,}92}\right] =$$

$$= P[1{,}9864 \leq z \leq 10{,}052] = 1 - 0{,}9761 = 0{,}0239$$

35 **Un examen tipo test tiene 50 preguntas y cada pregunta, tres respuestas diferentes, solo una de las cuales es correcta.**

Para aprobar, hace falta responder bien a 25 preguntas; para sacar un notable, a 35; y para un sobresaliente, a 45.

Si se responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de aprobar? ¿Y la de sacar notable? ¿Y sobresaliente?

$x \longrightarrow$ número de respuestas correctas. Sigue una binomial $B\left(50, \frac{1}{3}\right)$.

$$np = 50 \cdot \frac{1}{3} = \frac{50}{3} = 16{,}67 > 5$$

$$nq = 50 \cdot \frac{2}{3} = \frac{100}{3} > 5$$

$$\sqrt{npq} \quad \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 3{,}3333$$

x se puede aproximar por una normal $N(16{,}67;\ 3{,}33)$.

Si entendemos por aprobar obtener aprobado sin llegar a notable, entonces:

$$P[\text{aprobar}] = P[25 \le x < 35] = P[24{,}5 \le x' \le 34{,}5] = P\left[z \le \frac{34{,}5-16{,}67}{3{,}33}\right] - P\left[z \le \frac{24{,}5-16{,}67}{3{,}33}\right] =$$

$$= P[z \le 5{,}35] - P[z \le 2{,}35] = 1 - 0{,}9906 = 0{,}0094$$

$$P[\text{notable}] = P[35 \le x < 45] = P[34{,}5 \le x' \le 44{,}5] = P[x' \le 44{,}5] - P[x' \le 34{,}5] =$$

$$= P\left[z \le \frac{44{,}5-16{,}67}{3{,}33}\right] - P\left[z \le \frac{34{,}5-16{,}67}{3{,}33}\right] = P[z \le 8{,}35] - P[z \le 5{,}35] = 1 - 1 = 0$$

$$P[\text{sobresaliente}] = P[x \ge 45] = P[x' \ge 44{,}5] = P\left[z \ge \frac{44{,}5-16{,}67}{3{,}33}\right] = 1 - P[z \le 8{,}35] = 0$$

Cuestiones teóricas

36 ¿Qué relación guardan dos curvas de la distribución normal con la misma media y diferente desviación típica?

¿Y si tienen la misma desviación típica y diferente media?

Si tienen la misma media, están centradas en la misma vertical. Cuanto mayor es la desviación típica, menor altura tiene la curva en la vertical de la media.

Si tienen la misma desviación típica, son igual de altas, tienen la misma forma, pero una está desplazada a la izquierda de la otra.

37 Las notas de un examen siguen una normal. El 15,87% tiene una nota superior a 7, y el 15,87%, una nota inferior a 5.

a) ¿Cuál es la media del examen?

b) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene una nota entre 6 y 7?

$x \rightarrow$ nota. Sigue una normal $N(\mu, \sigma)$.

a) Por la simetría de la distribución normal, de los datos se deduce que $\mu = 6$.

b) Calculamos $P[x \le 7]$:

$P[x \ge 7] = 0{,}1587 \rightarrow P[x \le 7] = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$

Por tanto:

$P[6 \le x \le 7] = P[x \le 7] - P[x \le 6] = 0{,}8413 - 0{,}5 = 0{,}3413$

Un 34,13 % de los alumnos tiene entre 6 y 7.

Para profundizar

38 **En la fabricación de una pieza intervienen dos máquinas. A: produce un taladro cilíndrico cuyo diámetro, en milímetros, es $N(23; 0,5)$. B: secciona las piezas con un grosor que es, en centímetros, $N(11,5; 0,4)$. Ambos procesos son independientes.**

a) Calcula qué porcentaje de piezas tiene un taladro comprendido entre 20,5 y 24 mm.

b) Encuentra el porcentaje de piezas que tienen un grosor comprendido entre 10,5 y 12,7 cm.

c) Suponiendo que solo son válidas las piezas cuyas medidas son las dadas en a) y en b), calcula qué porcentaje de piezas aceptables se consigue.

a) $x \to$ diámetro. Sigue una normal $N(23; 0,5)$.

$$P[20,5 \le x \le 24] = P\left[\frac{20,5-23}{0,5} \le z \le \frac{24-23}{0,5}\right] = P\left[z \le \frac{24-23}{0,5}\right] - P\left[z \le \frac{20,5-23}{0,5}\right] =$$

$$= P[z \le 2] - P[z \le -5] = 0,9772 - (1 - 1) = 0,9772$$

Un 97,72 % de piezas tiene un taladro comprendido entre 20,5 mm y 24 mm.

b) $x \to$ grosor. Sigue una normal $N(11,5; 0,4)$.

$$P[10,5 \le x \le 12,7] = P\left[\frac{10,5-11,5}{0,4} \le z \le \frac{12,7-11,5}{0,4}\right] =$$

$$= P\left[z \le \frac{12,7-11,5}{0,4}\right] - P\left[z \le \frac{10,5-11,5}{0,4}\right] =$$

$$= P[z \le 3] - P[z \le -2,5] = 0,9987 - (1 - 0,9798) = 0,9785$$

Un 97,85 % de piezas tiene un grosor comprendido entre 10,5 cm y 12,7 cm.

c) Como los procesos son independientes:

P[diámetro válido y grosor válido] = 0,9772 · 0,9785 = 0,95619

Hay un 95,62 % de piezas válidas.

39 **Se lanzan dos dados 120 veces y se suman los puntos:**

SUMA	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
VECES	3	8	9	11	20	19	16	13	11	6	4

¿Se puede aceptar que esta distribución proviene de una normal?

Calculamos los parámetros de la distribución:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
2	3	6	12
3	8	24	72
4	9	36	144
5	11	55	275
6	20	120	720
7	19	133	931
8	16	128	1 024
9	13	117	1 053
10	11	110	1 100
11	6	66	726
12	4	48	576
TOTAL	120	843	6 633

$\bar{x} = \dfrac{843}{120} = 7,025$ $s = \sqrt{\dfrac{6\,633}{120} - 7,025^2} = 2,434$

Consideramos la distribución $N(7{,}025;\ 2{,}434)$.

EXTREMOS DE LOS INTERVALOS x_k	EXTREMOS TIPIFICADOS z_k	$P[z \le z_k]$	$p_k =$ $= P[z_k \le z \le z_{k+1}]$	$120 \cdot p_k$	NÚMEROS TEÓRICOS	NÚMEROS OBTENIDOS	|DIFERENCIAS|
1,5	–2,27	0,0116					
2,5	–1,86	0,0314	0,0198	2,376	3	3	0
3,5	–1,45	0,0735	0,0421	5,052	5	8	3
4,5	–1,04	0,1492	0,0757	9,084	9	9	0
5,5	–0,63	0,2643	0,1151	13,812	14	11	3
6,5	–0,22	0,4129	0,1486	17,832	18	20	2
7,5	0,20	0,5793	0,1664	19,968	20	19	1
8,5	0,61	0,7291	0,1498	17,976	18	16	2
9,5	1,02	0,8461	0,117	14,04	14	13	1
10,5	1,43	0,9236	0,0775	9,3	10	11	1
11,5	1,84	0,9671	0,0435	5,22	6	6	0
12,5	2,25	0,9878	0,0207	2,484	3	4	1

Las diferencias son muy pequeñas; podemos admitir la hipótesis de normalidad. Las sumas de los puntos siguen una distribución normal.

Autoevaluación

1 **Comprueba que $y = \frac{x}{2} - 1,\ 2 \le x \le 4$ es una función de densidad. Represéntala y calcula:**

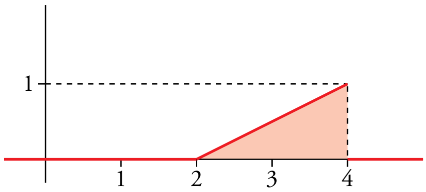
a) $P[x = 3]$ **b)** $P[x < 3]$ **c)** $P[x > 3{,}5]$ **d)** $P[3 \le x < 3{,}5]$

$f(x) = \frac{x}{2} - 1,\ \ 2 \le x \le 4,$ es una función de densidad (de una distribución estadística de variable continua) porque:

– Es no negativa (es decir, $\frac{x}{2} - 1 \ge 0$ en el intervalo [2, 4]), pues para $x = 2$, $f(2) = \frac{2}{2} \cdot 1 = 0$. Y como es creciente $\left(\text{se trata de una recta de pendiente } \frac{1}{2}\right)$, $f(x) > 0$ para $2 < x \le 4$.

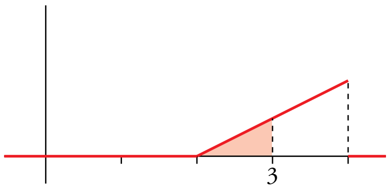
Suponemos que $f(x) = 0$ fuera del intervalo [2, 4].

– El área bajo la curva es la de un triángulo de base 2 y altura 1. Por tanto, área = 1.



a) $P[x = 3] = 0$, pues en las distribuciones de variable continua las probabilidades puntuales son 0.

b) $P[x < 3 = \frac{1}{4}$, pues es el área de un triángulo de base 1 y altura $\frac{1}{2}$.

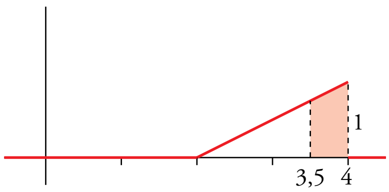


c) $P[x > 3{,}5]$

$f(3{,}5) = \frac{3{,}5}{2} - 1 = 0{,}75$

$f(4) = 1$

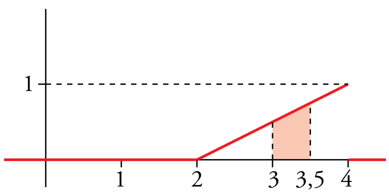
Área del trapecio $= \frac{1 + 0{,}75}{2} \cdot (4 - 3{,}5) = 0{,}4375$



$P[x > 3{,}5] = 0{,}4375$

d) $f(3) = 0{,}5$; $f(3{,}5) = 0{,}75$

$P[3 \le x \le 3{,}5] = \frac{(0{,}5 + 0{,}75) \cdot 0{,}75}{2} = 0{,}46875$



2 **Sabemos que una variable z es $N(0, 1)$.**

a) Calcula las siguientes probabilidades: $P[1{,}53 < z < 2{,}1]$ $\quad P[-1{,}53 < z < 2{,}1]$

b) Halla b y k para que se cumpla lo siguiente: $P[z < b] = 0{,}4$ $\quad P[-k < z < k] = 0{,}9$

a) $P[1{,}53 < x < 2{,}1] = P[z < 2{,}1] - P[z < 1{,}53] = \phi(2{,}1) - \phi(1{,}53) = 0{,}9821 - 0{,}9370 = 0{,}0451$

$P[-1{,}53 < z < 2{,}1] = P[z < 2{,}1] - P[z < -1{,}53] = \phi(2{,}1) - [1 - \phi(1{,}53)] =$

$= \phi(2{,}1) + \phi(1{,}53) - 1 = 0{,}9191$

b) $P[z < b] = 0{,}4 = 1 - 0{,}6 = 1 - P[z \le 0{,}26] = P[z \le -0{,}26] \;\to\; b = -0{,}26$

$P[-k < z < k] = P[z < k] - P[z < -k] = P[z < k] - (1 - P[z < k]) =$

$= 2P[z < k] - 1 = 0{,}9 \;\to\; P[z < k] = 0{,}95 \;\to\; k = 1{,}65$

3 **En una distribución normal de media 15, el dato 17 se tipifica como 1. Halla la desviación típica de la distribución.**

$$\frac{17-15}{\sigma} = 1 \;\to\; 2 = \sigma$$

La desviación típica es 2.

4 **El cociente intelectual (C.I.) de un colectivo de bomberos se distribuye normal, de media 108 y desviación típica 3,5. Llamamos x al C.I. de uno de ellos tomado al azar. Calcula:**

a) $P[x < 100]$ $\quad$ **b) $P[x > 115]$** $\quad$ **c) $P[100 < x < 115]$**

x es $N(108;\, 3{,}5) \;\to\; z = \dfrac{x-108}{3{,}5}$ es $N(0, 1)$

a) $P[x < 100] = P\left[z < \dfrac{100-108}{3{,}5}\right] = P[z < -2{,}29] = 1 - \phi(2{,}29) = 1 - 0{,}9890 = 0{,}011$

b) $P[x > 115] = P\left[z > \dfrac{115-108}{3{,}5}\right] = P[z > 2] = 1 - \phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

c) $P[100 < x < 115] = P[-2{,}29 < z < 2] = \phi(2) - [1 - \phi(2{,}29)] = \phi(2) + \phi(2{,}29) - 1 = 0{,}9662$

5 **El tiempo que tardo en llegar a clase sigue una normal de media 20 minutos. He comprobado que el 94,5 % de los días tardo menos de 28 minutos. Si en todo el año voy 177 días a clase, ¿cuántos días puedo estimar que tardaré menos de un cuarto de hora en llegar?**

$x \to$ tiempo que tardo. Sigue una normal $N(20, \sigma)$.

$$P[x \le 28] = P\left[z \le \frac{28-20}{\sigma}\right] = 0{,}945 \;\to\; \frac{8}{\sigma} = 1{,}6 \;\to\; \sigma = 5$$

$x \to$ tiempo que tardo. Sigue una normal $N(20, 5)$.

$$P[x \le 15] = P\left[z \le \frac{15-20}{5}\right] = P[z \le -1] = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

Como voy 177 días, $177 \cdot 0{,}1587 = 28{,}090$.

Estimo que 28 días de los 177 tardaré menos de 15 minutos.

6 **El 7 % de las personas padecen un pequeño defecto anatómico. En una empresa trabajan 80 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 10 con ese defecto?**

x es $B(80;\, 0{,}07) \;\to\; \mu = 80 \cdot 0{,}07 = 5{,}6;\;\; \sigma = \sqrt{80 \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}93} = \sqrt{5{,}208} = 2{,}28$

x' es $N(5{,}6;\, 2{,}28)$; $P[x > 10] = P[x \ge 11] = P[x' \ge 10{,}5] = P\left[z \ge \dfrac{10{,}5-5{,}6}{2{,}28}\right] =$

$= P[z \ge 2{,}15] = 1 - \phi(2{,}15) = 1 - 0{,}9842 = 0{,}0158$