Nombre:			**Tercera Evaluación**
Curso:	**1º Bachillerato B**	**Examen Repesca**	
Fecha:	***14 de junio de 2018***	***Atención:*** **La no explicación clara y concisa de cada ejercicio implica una penalización del 25% de la nota**	

1.- (2 puntos) Considera la función $f(x) = x \ln \frac{x}{a}$, con $a > 0$. Determina el valor de a para que *f(x)* tenga un mínimo relativo en $x = 1$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la función en *x=1*?

2.- (2,5 puntos) Dado el polinomio $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$

a) Determinar los coeficientes a, b y c sabiendo que tiene extremos relativos en *x=-1* y *x=+1* y que además pasa por el origen de coordenadas.

b) Estudiar la naturaleza de ambos extremos relativos (si son máximos o mínimos) y realizar un dibujo aproximado del polinomio.

3.- (2 puntos) Para adornar un mural queremos construir un marco de madera rectangular que encierra una superficie de cinco metros cuadrados. Sabemos que el coste de cada centímetro del marco en los lados horizontales es de 1,50 €, mientras que en los lados verticales es de 2,70 €. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo más barato posible.

4.- (2,5 puntos) Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2} \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4}$$

5.- (1 punto) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

1.- Considera la función $f(x) = x\ln\frac{x}{a}$, con $a > 0$. Determina el valor de a para que *f(x)* tenga un mínimo relativo en $x = 1$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la función en *x=1*?

Para que la función *f* tenga un mínimo relativo en x=1, tiene que ocurrir que *f'(1)=0*

Derivamos la función f:

$$f(x) = x\ln\frac{x}{a} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1\cdot\ln\frac{x}{a} + x\cdot\frac{a}{x}\cdot\frac{1}{a} = \ln\frac{x}{a} + 1$$

Calculamos la derivada en x=1, e igualamos a cero:

$$f'(x) = \ln\frac{x}{a} + 1 \quad \rightarrow \quad f'(1) = \ln\frac{1}{a} + 1 = 1 - \ln a \quad \rightarrow \quad f'(1) = 0 \quad \rightarrow \quad \ln\frac{1}{a} + 1 = 0$$

Despejamos a:

$$\ln\frac{1}{a} + 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \ln\frac{1}{a} = -1 \quad \leftrightarrow \quad \ln 1 - \ln a = -1 \quad \leftrightarrow \quad -\ln a = -1 \quad \leftrightarrow \quad \ln a = 1 \quad \leftrightarrow \quad a = e$$

Por tanto, para que la función f tenga un mínimo en x=1, a debe ser a=e.

La ecuación de la recta tangente es: $y - f(x_o) = f'(x_o)\cdot(x - x_o)$ y en el punto x=1: $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$

$$\text{Como: } \begin{cases} f(1) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1 = 1 - 1 = 0 \\ f'(1) = e \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \\ y = e(x-1) \end{array}$$

Por tanto, la recta tangente en x=1 es: y=e(x-1)

2.- Dado el polinomio *P(x)*$=x^3+ax^2+bx+c$

a) Determinar los coeficientes a, b y c sabiendo que tiene extremos relativos en *x=-1* y *x=+1* y que además pasa por el origen de coordenadas.
b) Estudiar la naturaleza de ambos extremos relativos (si son máximos o mínimos) y realizar un dibujo aproximado del polinomio.

a) Como *P(x)* tiene extremos relativos en ±1: $\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$

Calculamos *P'(x)*: $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y si sustituimos lo anterior, obtenemos:

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 & \rightarrow & 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \\ f'(1) = 0 & \rightarrow & 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3 - 2a + b = 0 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \{6 + 2b = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b = -3 \\ a = 0 \end{cases}$$

Como nos dicen que pasa por el origen O, entonces: $P(0) = 0 \quad \rightarrow \quad P(0) = 0^3 + a0^2 + b0 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = 0$

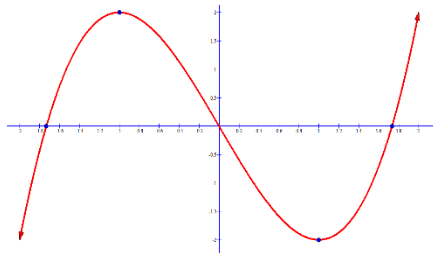
Por tanto, el polinomio buscado es: P(x)=x³-3x

b) Utilizando la segunda derivada podemos distinguir si son máximo o mínimo: $P''(x) = 6x + 2a = 6x$

- En x=-1, $P''(-1) = 6(-1) = -6 < 0 \quad \rightarrow \quad$ *Mínimo en* $x = -1$
- En x=1, $P''(1) = 6(1) = 6 > 0 \quad \rightarrow \quad$ *Máximo en* $x = -1$

Calculamos la "altura" de los extremos: $\begin{cases} P(-1) = -1 + 3 = 2 & \rightarrow & Min(-1,2) \\ P(1) = 1 - 3 = -2 & \rightarrow & Max(1,-2) \end{cases}$

Calculamos los puntos de corte con el eje x:

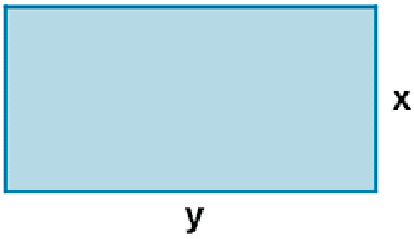


$$P(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3-3x=0 \quad \rightarrow \quad x\left(x^2-3\right)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1=-\sqrt{3} \\ x_2=0 \\ x_3=\sqrt{3} \end{cases}$$

Y vemos sun comportamiento en los infinitos: $\lim_{x\to\pm\infty} x^3-3x=\pm\infty$

Por tanto el boceto será el representado a la derecha.

3.- Para adornar un mural queremos construir un marco de madera rectangular que encierra una superficie de cinco metros cuadrados. Sabemos que el coste de cada centímetro del marco en los lados horizontales es de 1,50 €, mientras que en los lados verticales es de 2,70 €. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo más barato posible.



Llamando x e y a las dimensiones del marco (medidos en metros), tenemos:

$$x\cdot y=5 \quad \rightarrow \quad y=\frac{5}{x}$$

Los lados horizontales nos costarán: $H=2\cdot y\cdot 1{,}5\cdot 100=300y$
Teniendo en cuenta que cada centímetro cuesta 1,5 €, entonces el metro costará 150 €.

De igual forma, los lados verticales costarán: $V=2\cdot x\cdot 100\cdot 2{,}70=540x$

La función a minimizar será el perímetro del rectángulo:

$$P(x,y)=300y+540x$$

Si lo expresamos en función de una variable:

$$P(x)=300\cdot\frac{5}{x}+540x=\frac{1500}{x}+540x$$

Si derivamos el perímetro:

$$P(x)=540x+\frac{1500}{x} \quad \rightarrow \quad P'(x)=540-\frac{1500}{x^2}$$

Y lo igualamos a cero:

$$P'(x)=0 \quad \leftrightarrow \quad 540-\frac{1500}{x^2}=0 \quad \rightarrow \quad 540x^2-1500=0 \quad \rightarrow \quad x^2-\frac{25}{9}=0 \quad \rightarrow \quad x=\pm\frac{5}{3}$$

Como trabajamos con distancias, descartamos la solución x=-5/3.

Y por tanto, la altura del rectángulo será: $x=\frac{5}{3}$ y por tanto la anchura: $y=\frac{5}{x}=\frac{5}{5/3}=3$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo para que el coste del marco sea mínimo serán: ***3 metros de ancho por 1,67 metros de ancho.***

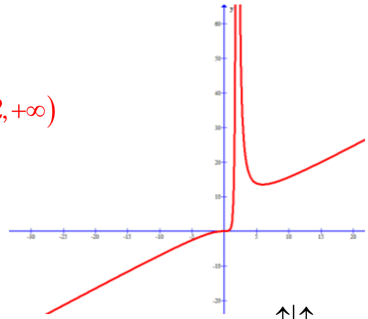
Faltaría comprobar que la función perímetro es un mínimo, para ello derivamos otra vez:

$$P'(x)=540-\frac{1500}{x^2} \quad \rightarrow \quad P''(x)=0+\frac{3000}{x^3} \rightarrow \quad P''\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{3000}{\left(\frac{5}{3}\right)^3}>0$$

Como la segunda derivada es positiva en x=5/3, entonces se trata de un mínimo c.q.d.

4.- Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones:

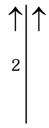
$$f(x)=\frac{\sqrt{2x}-x}{x-2} \qquad\qquad g(x)=\frac{x^3}{x^2-4x+4}$$



En la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}:\begin{cases}2x\geq 0\\ x-2\neq 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ x\neq 2\end{cases} \rightarrow$ $Dom(f)=[0,2)\cup(2,+\infty)$

Sabemos que una función f presenta una A.V. en un punto x_o si: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\pm\infty$

Calculamos los límites en x=2: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}=\dfrac{2}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\end{cases} \rightarrow$ ***Asíntota Vertical en x=2***.



También sabemos que una función *f* presenta una asíntota horizontal en la dirección $y=k$ si:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=k \qquad \forall\in\mathbb{R}$$

Calculamos el límite en el infinito: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}=-1 \rightarrow$ ***A. Horizontal en la dirección y=-1***

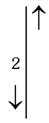
La función $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4x+4}$ es un cociente de polinomios por tanto solo tendrá "problemas" en los puntos donde el denominador se haga nulo.

$$x^2-4x+4=0 \quad\leftrightarrow\quad (x-2)^2=0 \quad\leftrightarrow\quad x=2$$

Así que $Dom(g)=\mathbb{R}-\{2\}$

Sabemos que los cocientes de polinomios suelen presentan A.V. en los puntos que anulan el denominador:

Calculamos los límites en x=2: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3}{x^2-4x+4}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3}{x^2-4x+4}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\end{cases} \rightarrow$ ***Asíntota Vertical en x=2***.



Calculamos el límite en el infinito: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^2-4x+4}=\pm\infty \rightarrow$ No hay Asíntota Horizontal

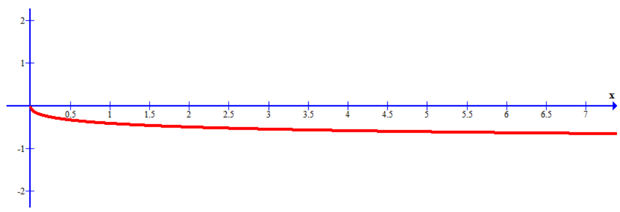
Estudiamos el límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-4x+4}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-4x^2+4x}=m=1$$

Y como nos da un número finito y distinto de cero, estudiamos este otro límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-4x+4}-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3+4x^2-4x}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-4x}{x^2-4x+4}=4$$

Por tanto, la función g tiene una Asíntota Oblicua en la dirección y=x+4



5.- Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=\infty-\infty \quad\rightarrow\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1-x}{\cancel{x}}}{\frac{x\cdot\ln(x)+(x-1)}{\cancel{x}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x\cdot\ln(x)+(x-1)}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 1}\left(\frac{-1}{\ln(x)+1+1}\right)=-\frac{1}{2}$$

Donde hemos aplicado la relga de L'Hopital que dice:

Sean f y g dos funciones reales que cumplen las siguientes condiciones:

- ✓ las funciones f y g son derivables en un entorno E del punto a.
- ✓ $f(a)=g(a)=0$
- ✓ Existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces se cumple que: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$