Nombre:		**Tercera Evaluación**	
Curso:	**1º Bachillerato B**	**Examen XI**	
Fecha:	***21 de mayo de 2018***	***Atención:*** **La no explicación clara y concisa de cada ejercicio implica una penalización del 25% de la nota**	

1.- **(2 puntos)** Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si\ x<0 \\ x^2+2a\cdot\cos(x) & si\ 0\le x<\pi \\ ax^2+b & si\ x\ge\pi \end{cases}$

es continua.

a) Determina *a* y *b*.
b) Estudia la derivabilidad de *f*.

2.- **(1 punto)** Calcula el dominio de la función: $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{\sqrt{x^2-1}}$

3.- **(1 punto)** Obtén las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y=x+\sqrt{x}$ en el punto de abscisa 4.

4.- **(2 puntos)** Obtener la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

b) $h(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

c) $g(x)=3\cdot sen^2(3x)$

d) $t(x)=e^x\cdot\cos x+2^4$

5.- **(1,5 puntos)** Obtén razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+x^2-2x}{x^3-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x\sqrt{x}}{1-x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{5x-2}{4x+3}\right)^{2x}$

6.- **(1 punto)** Calcula la derivada de la función: $f(x)=x^{senx}$

7.- **(0,5 puntos)** Sabiendo que la función *f(x)=6x+5* y que $(g\circ f)(x)=2x-1$.

Marca con X la expresión algebraica de la función *g(x)*.

☐ $-4x-6$ ☐ $\dfrac{x-8}{3}$ ☐ $\dfrac{x-2}{3}$ ☐ $3x-6$ ☐ $4x+4$

6.- **(1 punto)** Calcula la derivada enésima de la función: $f(x)=e^{-3x}$

1.- Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si\ x<0 \\ x^2+2a\cdot\cos(x) & si\ 0\le x<\pi \\ ax^2+b & si\ x\ge\pi \end{cases}$ es continua.

La función f es una función a trozos compuesta por 3 ramas de las cuales 2 son polinómicas y por tanto continuas y derivables en todo el cuerpo de los números reales. La otra rama es la suma entre una polinómica y una circular, que también son siempre continuas y derivables. Por tanto, solo tendríamos que fijarnos en los puntos donde la función cambia de rama. Es decir, en los puntos $x=0$ y $x=\pi$.

a) Determina *a* y *b*.

Para determinar a y b, como nos dice que la función es continua, solo basta con hacer los límites laterales en los puntos $x=0$ y $x=\pi$.

Continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0}(3x+2)=2 \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[x^2+2a\cdot\cos(x)\right]=0+2a\end{array}\right\} \to \quad 2a=2 \quad \to \quad a=1$$

Continuidad en $x=\pi$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}\left[x^2+2a\cdot\cos(x)\right]=\pi^2-2a \\ \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}\left[ax^2+b\right]=a\pi^2+b\end{array}\right\} \xrightarrow{si\ a=1} \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\pi}\left[x^2+2\cdot\cos(x)\right]=\pi^2-2 \\ \lim\limits_{x\to\pi}\left[x^2+b\right]=\pi^2+b\end{array}\right. \to \quad -2=b \quad \to \quad b=-2$$

Por tanto, *a=1* y *b=-2*.

b) Estudia la derivabilidad de *f*.

Conocidas a y b, la función queda de la forma: $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si\ x<0 \\ x^2+2\cdot\cos(x) & si\ 0\le x<\pi \\ x^2-2 & si\ x\ge\pi \end{cases}$

Sabemos que una función *f* es derivable en un punto, x_o, si existe el límite, $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$. Calculamos estos límites por la izquierda y por la derecha en los puntos $x=0$ y $x=\pi$.

Derivabilidad en $x=0$: $\left(f(0)=0^2+2\cdot\cos(0)=2\right)$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to0}\frac{(3x+2)-2}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}=3$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+2\cos(x)\right)-2}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+2-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\cdot x}{\cancel{x}}=0$$

Por tanto: $f'(0^-)\neq f'(0^+)$ y la función no es derivable en x=0.

Derivabilidad en $x=\pi$: $\left(f(\pi)=\pi^2-2\right)$

$$f'(\pi^-)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left((\pi+h)^2+2\cos(\pi+h)\right)-\left(\pi^2-2\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{\pi^2}+2h\pi+h^2-2\cos(h)-\cancel{\pi^2}+2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+2h\pi}{h}+\lim_{h\to0}\frac{2-2\cos(h)}{h}=\lim_{h\to0}(h+2\pi)+\left(\lim_{h\to0}\frac{2-2\cos(h)}{h}\right)^*=2\pi+0=2\pi$$

$$f'(\pi^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left((\pi+h)^2-2\right)-\left(\pi^2-2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\pi^2}+2h\pi+h^2\cancel{-2}-\cancel{\pi^2}\cancel{+2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2\pi)}{\cancel{h}}=$$

$$\lim_{h\to 0}(h+2\pi)=2\pi$$

El límite del paréntesis lo hacemos a parte:

$$\lim_{h\to 0}\frac{2-2\cos(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1-\cos(h))}{h}=\frac{0}{0}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1-\cos(h))}{h}\cdot\frac{1+\cos(h)}{1+\cos(h)}=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(1-\cos^2(h)\right)}{h\cdot(1+\cos(h))}=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(sen^2 h\right)}{h\cdot(1+\cos h)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}\cdot\frac{senh}{(1+\cos h)}=\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2senh}{(1+\cos h)}=\lim_{h\to 0}\frac{senh\to h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2senh}{(1+\cos h)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2senh}{(1+\cos h)}=1\cdot\frac{0}{1}=0$$

En la que hemos utilizado lo visto en el punto 6.4.2.3 de funciones equivalentes en un punto

Por tanto, la función es derivable en x=π.

Así que en resumen la función es continua en $\mathbb{R}$, para a=1 y b=-2 y es derivable en $\mathbb{R}^*$

2.- Calcula el dominio de la función: $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{\sqrt{x^2-1}}$

El dominio de $\ln(x+3)$ son los valores de x que verifiquen $x+3>0 \quad \to \quad x>-3$

Y el dominio de $\sqrt{x^2-1}$ son los valores de x que verifiquen $x^2-1>0 \quad \to \quad (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Por tanto, el dominio de: $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{\sqrt{x^2-1}}$ *es* $Dom(f)=(-3,-1)\cup(1,+\infty)$

3.- Obtén las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y=x+\sqrt{x}$ en el punto de abscisa 4.

El cálculo de la derivada de una función en un punto ***a***, nos permite escribir la ecuación de la ***recta tangente*** a la gráfica en el punto de abscisas ***a***, utilizando la ecuación punto pendiente:

$$\boxed{y=m(x-a)+b}$$

Donde ***m*** es la pendiente de la recta y ***b*** la ordenada en el origen. $\begin{cases} m=f'(a)\\ b=f(a)\end{cases}$

La ***recta normal*** a una gráfica en un punto x_o, es la recta perpendicular a la recta pendiente en dicho punto.

Empezamos calculando la derivada de f:

$$f(x)=x+\sqrt{x} \quad \to \quad f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En el punto de abscisa 4, x=4

$$f'(4)=1+\frac{1}{2\sqrt{4}}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

La pendiente es $m=\dfrac{5}{4}$

En el punto x=4, tenemos:

$$f(4)=4+\sqrt{4}=4+2=6$$

La ordenada en el origen b=6

Con estos datos, la ecuación de la recta tangente en *x=4* es: $y=m(x-a)+b \quad \rightarrow \quad y=\frac{5}{4}(x-4)+6$ que escrita con la ecuación general es:

$$r_{\text{tangente}}: 5x-4y+4=0$$

Y la recta normal en el mismo punto es: $y=\frac{-1}{m}(x-a)+b \quad \rightarrow \quad y=-\frac{4}{5}(x-4)+6$ que escrita con la ecuación general es:

$$r_{\text{normal}}: 4x+5y-46=0$$

4.- Obtener la función derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{\cancel{x+1}}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{x^2+x}$$

$$g(x)=3\cdot sen^2(3x) \quad \rightarrow \quad g'(x)=3\cdot 2\cdot sen(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3=9\cdot sen(6x)$$

$$h(x)=\frac{-2x}{(x^2-1)^2} \quad \rightarrow \quad h'(x)=\frac{-2\cdot(x^2-1)^2-\left(-2x\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x\right)}{(x^2-1)^4}=\frac{-2\cdot(x^2-1)^2+8x^2\cdot(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{\left(-2\cdot(x^2-1)+8x^2\right)\cancel{(x^2-1)}}{(x^2-1)^{\cancel{4}\to 3}}=\frac{\left(-2\cdot(x^2-1)+8x^2\right)}{(x^2-1)^3}=\frac{-2x^2+2+8x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

$$t(x)=e^x\cdot\cos x+2^4 \quad \rightarrow \quad t'(x)=e^x\cdot\cos x-e^x\cdot senx=e^x\cdot\left(\cos x-senx\right)$$

5.- Obtén razonadamente los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+x^2-2x}{x^3-3x+2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -2}\frac{x(x^2+x-2)}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x-1)}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x\sqrt{x}}{1-x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x\sqrt{x}}{1-x^2}\cdot\frac{1+x\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\left(1-x^2\right)\cdot\left(1+x\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(1-x)}\cdot\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{(1-x)}\cdot(1+x)\cdot\left(1+x\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x+1\right)}{(1+x)\cdot\left(1+x\sqrt{x}\right)}=\frac{3}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{5x-2}{4x+3}\right)^{2x}=\left(\frac{5-2}{4+3}\right)^2=\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{9}{49}$$

6.- Calcula la derivada de la función: $f(x)=x^{senx}$

Se trata de una función elevado a otra, así que derivaremos utilizando la *derivación logarítmica*:

$$y=x^{senx} \quad \rightarrow \quad \ln y=\ln x^{senx}=senx\cdot\ln x \quad \rightarrow \quad \ln y=senx\cdot\ln x$$

Derivamos:

$$(\ln y)'=(senx\cdot\ln x)' \quad \rightarrow \quad \frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln x+senx\cdot\frac{1}{x}=\cos x\cdot\ln x+\frac{senx}{x}$$

Despejamos y':

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{senx}{x} \quad \rightarrow \quad y' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{senx}{x} \right)$$

Y sustituyendo y por *f(x)*:

$$f'(x) = x^{senx} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{senx}{x} \right)$$

Así que la derivada de $f(x) = x^{senx}$ *es* $f'(x) = x^{senx} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{senx}{x} \right)$

7.- Sabiendo que la función *f(x)=6x+5* y que $(g \circ f)(x) = 2x - 1$.
Marca con *x* la expresión algebraica de la función *g(x)*.

☐ $-4x-6$ ☐ $\frac{x-8}{3}$ ☐ $\frac{x-2}{3}$ ☐ $3x-6$ ☐ $4x+4$

Si de *6x* pasamos a *2x*, tenemos que dividir por 3 . Así que si probamos con la segunda:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)-8}{3} = \frac{6x+5-8}{3} = \frac{6x-3}{3} = 2x - 1$$

Claramente la tercera no funciona porque da 2x+1, y las otras las desechamos por no dividir por 3.

Por tanto $g(x) = \frac{x-8}{3}$

6.- Calcula la derivada enésima de la función: $f(x) = e^{-3x}$

Empezamos calculando la primera derivada: $f'(x) = -3e^{-3x}$

Calculamos la segunda: $f''(x) = -3e^{-3x} \cdot (-3) = (-3)^2 \cdot e^{-3x}$

Calculamos la tercera: $f'''(x) = 3^2 e^{-3x} \cdot (-3) = (-3)^3 \cdot e^{-3x}$

Por lo tanto, cabe esperar que la derivada n-ésima sea:

$$f^{n)}(x) = (-3)^n \cdot e^{-3x}$$

Vamos a demostrarlo por inducción:

Sea $f^{n)}(x) = (-3)^n \cdot e^{-3x}$, entonces su siguiente derivada será: $f^{n+1)}(x) = (-3)^{n+1} \cdot e^{-3x}$, vamos a ver:

$$f^{n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{n)}(x) = \frac{d}{dx}(-3)^n e^{-3x} = (-3)^n e^{2x} \cdot (-3) = (-3)^{n+1} \cdot e^{-3x}$$

Por tanto, queda demostrado por inducción que: $f^{n)}(x) = (-3)^n \cdot e^{-3x}$