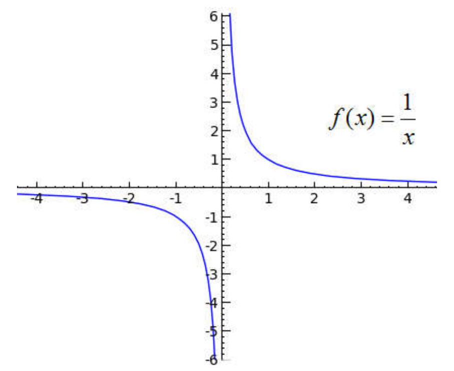
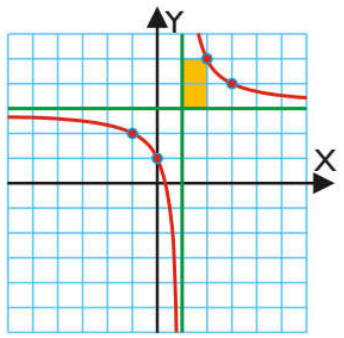
Departamento de Matemáticas
I.E. Juan Ramón Jiménez
Casablanca

Nombre:			**Tercera Evaluación**
Curso:	**1º Bachillerato B**	**Examen X**	
Fecha:	***23 de abril de 2018***	***Atención:*** **La no explicación clara y concisa de cada ejercicio implica una penalización del 25% de la nota**	

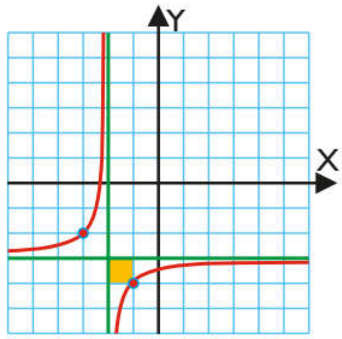
1.- **(1 punto)** A partir de la función de proporcionalidad inversa $f(x)=\dfrac{1}{x}$, escribe las expresiones algebraicas de las funciones representadas a continuación:



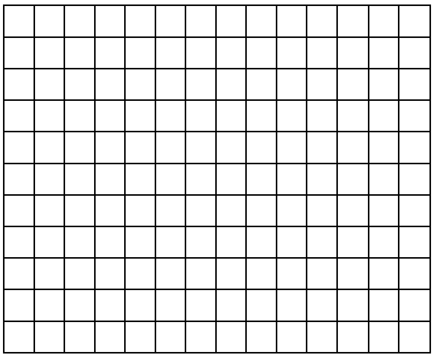
a)



b)



2.- **(2 puntos)** Con 12 metros de moldura se desea decorar una puerta formando un rectángulo.



a) Escribe la fórmula que expresa el área de dicho rectángulo en función del lado x.

b) Indica el dominio y el recorrido de dicha función.

c) Representa la función en el cuadro de la izquierda.

d) Determina las dimensiones del rectángulo que hacen el área máxima.

3.- **(1,5 puntos)** Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2+4x+8}{x^3-x^2-9x+9} \qquad g(x)=(x-2)\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad h(x)=\frac{1-x}{x^2-|x|}$$

4.- **(2 puntos)** Dadas las funciones: $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$; $g(x)=\dfrac{-3x}{x+3}$ y $h(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Utilizando las funciones *f(x)* y *h(x)*, comprueba que la composición de funciones no es conmutativa.

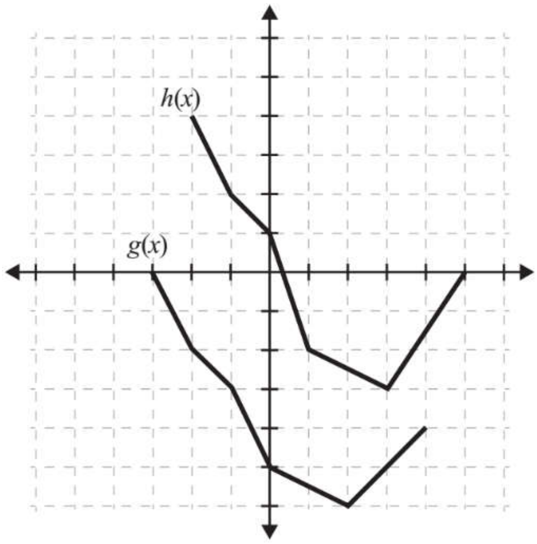
b) Calcula la función inversa de g.

c) Calcula: $g\circ g$

d) ¿Cuál es la función $z=g\circ g\circ g\circ g\circ g\circ g\circ g\circ g$?

5.- **(1,5 puntos)**

a) Con la ayuda del gráfico de la derecha, encuentre el valor de x para el que: $g\left(h(x)\right)=0$



b) Sean las funciones f y g dadas por:

$$f(x)=2x^2-6x+5 \quad y \quad g(x)=-x-2$$

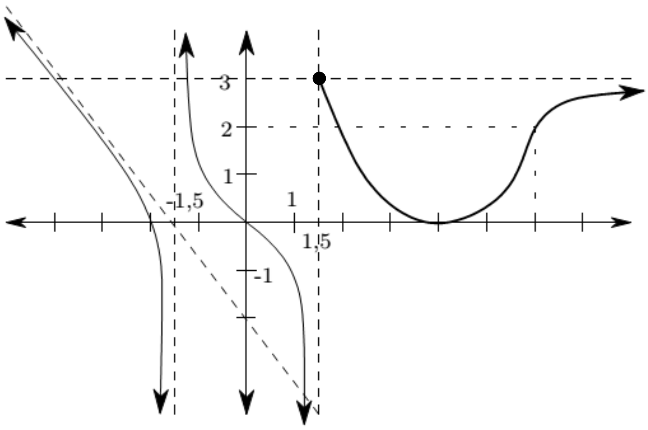
¿Cuál es la expresión de $-f\left(-g(-x)\right)$?

c) Escribe la función $g\left(x\right)=\sqrt{x-6}$ como composición de otras dos funciones.

6.- **(1,5 puntos)** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+6}{5x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x+2}$

7.- **(0,5 puntos)** Calcula los siguientes límites:



(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to-3/2} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to3/2} f(x)$

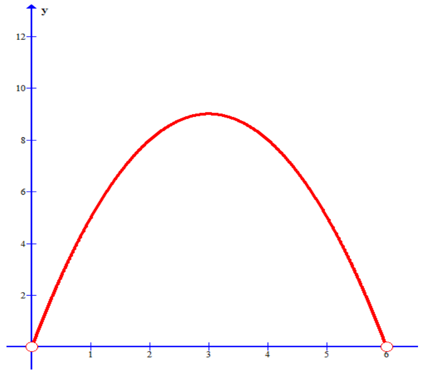
(d) $f(3/2)$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

1.- A partir de la función de proporcionalidad inversa $f(x)=\dfrac{1}{x}$, escribe las expresiones algebraicas de las funciones representadas a continuación:

Sol: $a)f(x)=\dfrac{2}{x-1}+3$ $\qquad b)f(x)=\dfrac{-1}{x+2}-3$

2.- Con 12 metros de moldura se desea decorar una puerta formando un rectángulo.



a) Escribe la fórmula que expresa el área de dicho rectángulo en función del lado x.

b) Indica el dominio y el recorrido de dicha función.

c) Representa la función en el cuadro de la izquierda.

d) Determina las dimensiones del rectángulo que hacen el área máxima.

Sol: a) $A(x)=x\cdot(6-x)=6x-x^2$; b) $Dom(A)=(0,6)$ $\quad$ $\operatorname{Im}(f)=(0,9]$; c); d) El máximo es el vértice (3,9), por tanto, las dimensiones serían 3x3 m, o sea, el área es máxima 9 en un cuadrado.

3.- Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2+4x+8}{x^3-x^2-9x+9} \qquad g(x)=(x-2)\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad h(x)=\frac{1-x}{x^2-|x|}$$

Sol: Resueltos en clase; $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-3,1,3\}$ $\quad$ $Dom(g)=[-1,1)$ $\quad$ $Dom(h)=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

4.- Dadas las funciones: $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$; $g(x)=\dfrac{-3x}{x+3}$ y $h(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Utilizando las funciones *f(x)* y *h(x)*, comprueba que la composición de funciones no es conmutativa.

$$f\circ g=f\left(g(x)\right)=\frac{1}{2\left(\frac{1}{x}\right)-1}=\frac{x}{2-x} \qquad g\circ f=g\left(f(x)\right)=\frac{1}{\frac{1}{2x-1}}=2x-1 \quad\rightarrow\quad NO\ \ CONMUTATIVA\rightarrow f\circ g\neq g\circ f$$

b) Calcula la función inversa de g.

Para calcular la inversa, despejamos x en función de y:

$$g(x)=\frac{-3x}{x+3} \quad\rightarrow\quad y=\frac{-3x}{x+3} \quad\rightarrow\quad (x+3)\cdot y=-3x \quad\rightarrow\quad xy+3y=-3x \quad\rightarrow\quad xy+3x=-3y$$

$$x(y+3)=-3y \quad\rightarrow\quad x=\frac{-3y}{y+3}$$

Y si cambiamos una variable por otra: $x=\dfrac{-3y}{y+3} \quad\leftrightarrow\quad y=\dfrac{-3x}{x+3} \quad\rightarrow\quad g^{-1}(x)=\dfrac{-3x}{x+3}$

Por tanto, vemos que la inversa de g coincide con g.

c) Calcula: $g\circ g$

Si g coincide con su inversa, si componemos g con g deberemos obtener la identidad, veámoslo:

$$g\circ g=g\left(g(x)\right)=\frac{-3\left(\frac{-3x}{x+3}\right)}{\left(\frac{-3x}{x+3}\right)+3}=\frac{\frac{9x}{\cancel{x+3}}}{\frac{-3x+3x+9}{\cancel{x+3}}}=\frac{9x}{9}=x$$

d) ¿Cuál es la función $z = g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g$?

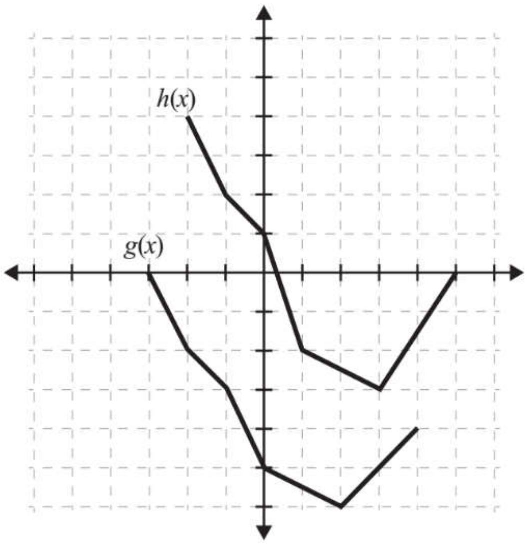
Como $g \circ g = x = Identidad$ entonces la composición de un número impar de veces de g da como resultado g:

$$z = g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g = I \circ I \circ I \circ I \circ g = I \circ g = g$$

Así que $z(x) = g(x) = \dfrac{-3x}{x+3}$

5.- **(1,5 puntos)**

a) Con la ayuda del gráfico de la derecha, encuentre el valor de x para el que: $g\left(h(x)\right) = 0$



En el dibujo de g, vemos que $g\left(h(x)\right) = 0 \quad \leftrightarrow \quad g(-3) = 0$

Por tanto, buscamos el punto donde h(x)=-3.

Y esto ocurre en $h(x) = -3 \quad \leftrightarrow \quad x = 3$

Por tanto, en x=3, la composición: $g \circ f = g\left(f(x)\right) = g\left(f(x)\right)$

$$g \circ f = g\left(f(x)\right) = g\left(f(3)\right) = 0$$

El valor de x es x=3

b) Sean las funciones f y g dadas por:

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 5 \qquad y \qquad g(x) = -x - 2$$

¿Cuál es la expresión de $-f\left(-g(-x)\right)$?

La función $-f(x) = -2x^2 + 6x - 5 \quad y \quad g(-x) = -(-x) - 2 = x - 2 \quad \rightarrow \quad -g(-x) = -x + 2$

Por tanto, sustituyendo una en otra tenemos:

$$-f\left(-g(-x)\right) = -2(-x+2)^2 + 6(-x+2) - 5 = -2x^2 - 8 + 8x - 6x + 12 - 5 = -2x^2 + 2x - 1$$

Y por tanto: $-f\left(-g(-x)\right) = -2x^2 + 2x - 1$

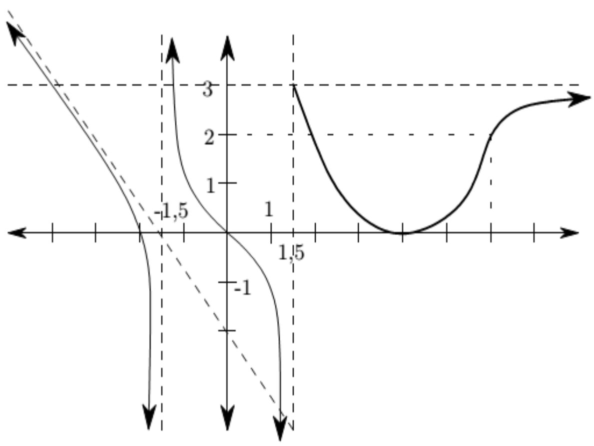
c) Escribe la función $g(x) = \sqrt{x-6}$ como composición de otras dos funciones.

Por ejemplo, sean $f(x) = \sqrt{x} \quad y \quad h(x) = x - 6 \quad \rightarrow \quad g(x) = (f \circ h)(x) = f\left(h(x)\right) = \sqrt{x-6}$ ***(Pueden haber más)***

6.- **(1,5 puntos)** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 6}{5x - 1} = \dfrac{4}{9}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}} = \sqrt{5}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2} = 0$

7.- **(0,5 puntos)** Calcula los siguientes límites:



$a)\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

$b)\ \lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} f(x) = \nexists = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

$c)\ \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} f(x) = \nexists = \begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+} f(x) = 3 \end{cases}$

$d)\ f\left(\tfrac{3}{2}\right) = 3$

$e)\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$