Solución Examen 2

1.- Sean $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(-1,3)$ dos vectores de un espacio vectorial V^2.

a) Demuestra que el conjunto $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ forma una base de V^2.

b) Expresa el vector $\vec{w}=(7,-9)$ como combinación de los vectores de la base B.

c) ¿Es dicha base ortogonal?

d) ¿Y ortonormal?

e) Encuentra el vector $\hat{v}$, paralelo al vector $\vec{v}$ y que sea unitario.

a) En V^2, para que dos vectores formen una base, basta con que sean linealmente independientes, o lo que es lo mismo, que no sean paralelos:

$$\vec{u}\neq k\cdot\vec{v},\forall k\in\mathbb{R}$$

$$(2,1)\neq k(-1,3) \quad\rightarrow\quad \frac{2}{-1}\neq\frac{1}{3}$$

Por tanto el conjunto $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ forma una base de V^2.

b) Expresar un vector en combinación lineal de otros dos es encontrar los valores de α y β que verifiquen:

$$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v} \quad\rightarrow\quad (7,-9)=\alpha(2,1)+\beta(-1,3) \quad\rightarrow\quad \begin{cases}7=2\alpha-\beta\\ -9=\alpha+3\beta\end{cases}$$

Por tanto, resolviendo el sistema, obtenemos: $\beta=-\frac{25}{7}$ y $\alpha=\frac{12}{7}$

Así que: $\vec{w}=\frac{12}{7}\cdot\vec{u}-\frac{25}{7}\cdot\vec{v}$

c) Decimos que una base es ortogonal, si los vectores que la forman son perpendiculares, y para ello no ayudamos del producto escalar; Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot(-1)+1\cdot(3)=-2+3=1\neq 0$$

Por tanto no es una base ortogonal.

d) Para que B sea una base ortonormal, además de ser base ortogonal, los vectores han de ser unitarios.
En este caso, como no son ortogonales, no pueden ser ortonormales.

Por tanto, tampoco es base ortonormal.

2.- Dadas las rectas r: ax+y–2=0 y s: x+2y+b=0, halla los valores que deben tomar a y b para que las rectas:

a) Sean paralelas no coincidentes.

b) Sean coincidentes.

c) Sean Perpendiculares.

d) Formen un ángulo de 30°.

a) Para que dos rectas dadas mediante su expresión general sean paralelas no coincidentes, tiene que ocurrir que sus vectores directores sean paralelos y que el punto de una recta, no pertenezca a la otra, o lo que es lo mismo:

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}\text{ , en este caso: }\frac{a}{1}=\frac{1}{2}\neq\frac{-2}{b}\text{, por tanto: }a=\frac{1}{2}\text{ y }b\neq-4$$

b) Para que sean coincidentes ha de ocurrir:

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\text{ , en este caso: }\frac{a}{1}=\frac{1}{2}=\frac{-2}{b}\text{, por tanto: }a=\frac{1}{2}\text{ y }b=-4$$

c) Para que las rectas r y s sean perpendiculares, sus vectores directores, también lo tienen que ser. Utilizando de nuevo el producto escalar:

Si (-1,a) es el vector director de r, y (-2,1) el vector director de la recta s:

$$(-1,a)\cdot(-2,1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2+a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-2$$

Por tanto para que las rectas r y s sean perpendiculares, a debe de valer -2.

d) Y por último, para que formen un ángulo de 30°, sus vectores directores deberán formar también dicho ángulo. Por tanto, otra vez, mediante el producto escalar:

$$\operatorname{Cos}\alpha=\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}\right| \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+a}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{15a^2+15}=4+2a \quad \rightarrow \quad 15a^2+15=16+4a^2+16a$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado:

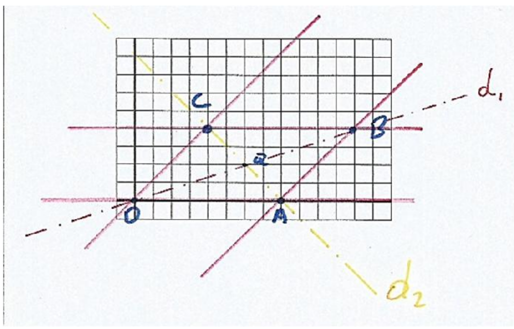
$$11a^2-16a-1=0 \quad \rightarrow \quad a=\frac{16\pm\sqrt{256+4\cdot 11}}{22}=\frac{16\pm\sqrt{300}}{22}=\frac{16\pm 10\sqrt{3}}{22}=\frac{8\pm 5\sqrt{3}}{11}$$

Por tanto, para que los vectores, y por tanto las rectas, formen un ángulo de 30°, a puede valer:

$$a_1=\frac{8+5\sqrt{3}}{11} \qquad a_2=\frac{8-5\sqrt{3}}{11}$$

3.- De un paralelogramo se conoce un vértice, A(8, 0), y el punto de corte de las dos diagonales, (6, 2). También sabemos que otro vértice se encuentra en el origen de coordenadas. Calcular:

a) Los otros vértices.
b) Las ecuaciones de las diagonales.
c) La longitud de las diagonales.



Lo primero es ayudarnos de un dibujo que refleje lo más fielmente los datos del enunciado. Hecho esto, empezamos:

a) Para calcular los otros vértices, nos ayudaremos del punto medio de un segmento:

Si D(0,0) y el punto medio del segmento $\overline{DB}$ es Q(6,2), entonces B es:

$$(6,2)=\left(\frac{0+B_x}{2},\frac{0+B_y}{2}\right) \quad \rightarrow \quad B(12,4)$$

De forma similar, obtenemos el vértice C, pero ahora haciendo que Q es el punto medio del segmento $\overline{AC}$. Por tanto **C(4,4)**

b) Para calcular las ecuaciones de las diagonales, utilizaremos los vectores $\overrightarrow{DB}=(12,4)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4,4)$. Así que con un punto y un vector escribimos ambas ecuaciones:

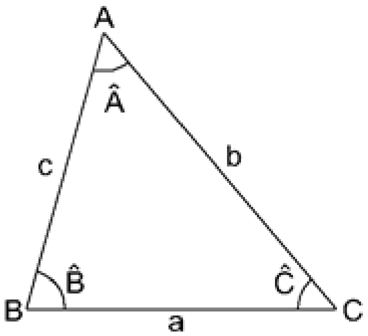
- ***Diagonal DB:*** $\frac{x-0}{12}=\frac{y-0}{4} \quad \rightarrow \quad 4x-12y=0$
- ***Diagonal AC:*** $\frac{x-4}{-4}=\frac{y-4}{4} \quad \rightarrow \quad 4x+4y-32=0$

c) La longitud de las diagonales, las calculo con el módulo de los vectores $\overrightarrow{DB}=(12,4)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4,4)$

- ***Longitud diagonal DB:*** $\|\overrightarrow{DB}\|=\sqrt{12^2+4^2}=\sqrt{144+16}=4\sqrt{10}$
- ***Longitud diagonal AC:*** $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

Solución Examen 2

4.- Jorge desde su casa, ve la fuente que está en el centro de la plaza mayor y el castillo, ha preparado un teodolito casero para calcular el ángulo formado por dichas visuales y ha obtenido 40° y 32'. La distancia de su casa a la fuente es de 42 dm y la distancia de la fuente al castillo es de 32 dm. Si hubiera un camino directo desde la casa de Jorge al castillo, ¿Cuánto mediría?.



En el triángulo de la izquierda, A es el castillo, B la casa de Jorge y C la fuente. Si hacemos a=42 dm, b=32 dm y B=40°32', aplicando el teorema de los senos, hallamos el ángulo A.

$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB} \quad \rightarrow \quad SenA=\frac{a}{b}senB=\frac{42}{32}sen(40°32')=0,853$$

Si $Sen\ A = 0,853 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{A}_1 = 58°32'22" \\ \hat{A}_2 = 121°27'38" \end{cases}$

Las dos soluciones son posibles, pero Jorge sabe que desde el castillo el ángulo que forman las visuales a su casa y a la plaza mayor es agudo, por ello la solución válida es: $\hat{A} = 58°32'22"$

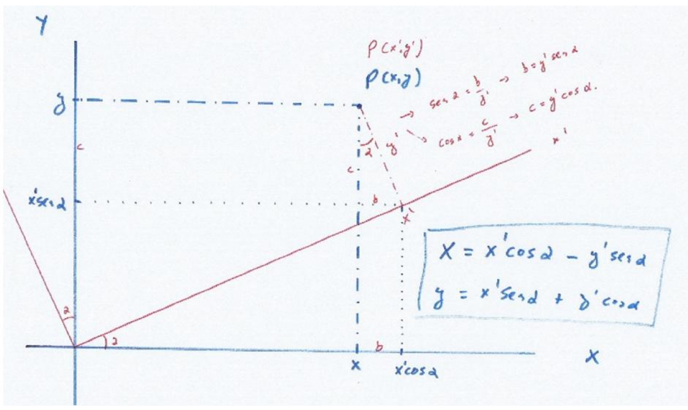
Según esto, el ángulo C: $\hat{C} = 180 - 58°32'22" - 40°32' = 80°55'38"$

Y con esto, y volviendo a utilizar el teorema de los senos, calculamos la longitud del lado c:

$$\frac{a}{senA}=\frac{c}{senC} \quad \rightarrow \quad c=\frac{senC}{senA}\cdot a=\frac{sen(80°44'38")}{sen(58°32'22")}\cdot 42=48,62$$

La distancia de la casa de Jorge al castillo es de 48,62 dm.

5.- Las coordenadas de un punto P en un sistema cartesiano son (x, y). Halla las coordenadas (x', y') del mismo punto después de girar los ejes, alrededor del origen de coordenadas, un ángulo α.



Realizamos un cambio de sistema de referencia con centro en el origen de coordenadas y giro de amplitud α.

Si observamos la figura adjunta, llegamos a que utilizando las razones trigonométricas del ángulo α :

$$x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot sen\alpha$$
$$y' = x\cdot sen\alpha + y\cos\alpha$$

Puesto que x o x' son variables mudas.