

101 EJERCICIOS de RECTAS

Forma paramétrica:

1. Dado el punto $A(5,3)$ y el vector director $\vec{u}_r = (1,-2)$, se pide:
 - a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r que determinan.
 - b) Obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.
 - c) Comprobar analíticamente si los puntos $P(2,-1)$ y $Q(3,7) \in r$
 - d) Dibujar dicha recta y comprobar gráficamente los apartados anteriores.
 - e) Indicar otras ecuaciones paramétricas para la recta.
2. Dados los puntos $A(1,3)$ y $B(-1,6)$, se pide:
 - a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta s que determinan.
 - b) Obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.
 - c) Comprobar analíticamente si los puntos $P(7,-6)$ y $Q(2,2) \in s$
 - d) Dibujar dicha recta y comprobar gráficamente los apartados anteriores.

Forma continua y general:

3. Con los datos del ejercicio 1, se pide:
 - a) Hallar las ecuaciones continua y general o implícita de la recta r que determinan. (Soluc: $2x+y-13=0$)
 - b) Comprobar en la ecuación general que $\vec{u}_r = (-B,A)$
 - c) A partir de la ecuación general, obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.
 - d) Comprobar en ambas ecuaciones si los puntos $P(2,1)$ y $Q(3,7) \in r$
4. Ídem con los datos del ejercicio 2 (Soluc: $3x+2y-9=0$)
5. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de los ejes de coordenadas.

Forma punto-pendiente:

6. Hallar la forma punto-pendiente de las dos rectas de los ejercicios 1 y 2
 - a) Directamente, a partir de los datos.
 - b) A partir de su forma continua.
 - c) Operarla para comprobar que se obtiene la general.

Forma explícita:

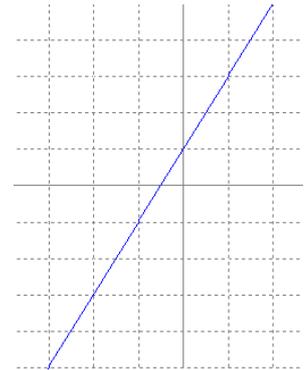
7. Hallar la forma explícita de las dos rectas de los ejercicios 1 y 2
 - a) Directamente, a partir de los datos.
 - b) A partir de las formas anteriores.(Soluc: $y=-2x+13$ e $y=-3x/2+9/2$)



Todas las formas:

8. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3,5) y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (2,-4)$ en todas las formas posibles. Dibujarla. (Soluc: $2x+y-11=0$)
 b) Ídem para el punto A(3,1) y $\vec{u} = (4,-2)$ (Soluc: $x+2y-5=0$)
 c) Ídem para A(3,1) y $\vec{u} = (0,2)$ (Soluc: $x=3$)
 d) Ídem para A(3,-1) y $\vec{u} = (5,0)$ (Soluc: $y=-1$)

9. a) Hallar la ecuación de la bisectriz del 1^{er} y 3^{er} cuadrantes. (Soluc: $y=x$)
 b) Ídem para la del 2^o y 4^o cuadrantes. (Soluc: $y=-x$)
 c) Hallar la ecuación de las dos trisectrices del 1^{er} cuadrante.



10. Dada la recta de la figura, hallar su ecuación:
 a) Directamente, en forma continua.
 b) En forma general, operando a partir de la anterior.
 c) Directamente, en forma punto-pendiente.
 d) Directamente, en forma explícita.

11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,2) y B(1,-4) en todas las formas posibles. Dibujarla. (Soluc: $3x-y-7=0$)

12. Representar las siguientes rectas:

a) $2x+3y-7=0$ b) $x=3$ c) $y=2$ d) $\left. \begin{matrix} x=3-\lambda \\ y=-5+2\lambda \end{matrix} \right\}$ e) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1}$

13. Pasar a forma explícita las siguientes rectas y calcular sus pendientes:

a) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-1}$ b) $5x+3y+6=0$ c) $\left. \begin{matrix} x=2+t \\ y=5-3t \end{matrix} \right\}$ (Soluc : $y = -\frac{x}{2} - \frac{7}{2}$; $y = -\frac{5}{3}x - 2$; $y = -3x + 11$)

14. Determinar si el punto P(2,-1) pertenece a la recta $3x-2y+5=0$. ¿Y el punto (1,4)? (Soluc: NO; Sí)

15. Dada la recta $ax+5y+4=0$, determinar **a** para que la recta pase por el punto (2,-2) (Soluc: $a=3$)

16. a) Determinar, analíticamente, si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.
 b) Ídem para A(1,1), B(3,4) y C(4,6) (Nota: un dibujo puede ser útil)
 c) Hallar k para que los puntos A(1,7), B(-3,4) y C(k,5) estén alineados. (Soluc: Sí; NO; $k=-5/3$)

17. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-2,1/3) y tiene igual pendiente que la recta que pasa por P(2,1) y Q(3,4) (Soluc : $y - \frac{1}{3} = 3(x + 2)$)

18. Dada la recta que pasa por A(1,0) y B(3,4) se pide:
 a) Hallar su forma paramétrica, continua, implícita, punto-pendiente y explícita. (Soluc: $2x-y-2=0$)
 b) ¿Cuál es su pendiente? (Soluc: $m=2$)
 c) ¿El punto (2,2) pertenece a dicha recta? (Soluc: $(2,2) \in r$)

19. Ídem para la recta que pasa por A(-2,1) y B(4,5). ¿El punto (1,3) es de dicha recta?
(Soluc: $2x-3y+7=0$; $m=2/3$; Sí)
20. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1) y forma un ángulo de 120° con la parte positiva del eje x. (Soluc : $y - 1 = -\sqrt{3}(x - 2)$)
21. ¿Qué ángulo forma la recta $x+y+5=0$ con OX^+ ? (Soluc: 135°)
22. Dada la recta $5x-3y+7=0$, hallar la longitud de los segmentos que determina sobre los ejes. Hacer el dibujo. (Soluc: $7/5$ u sobre OX ; $7/3$ u sobre OY^+)
23. Hallar el área limitada por la recta $5x+y-5=0$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. Hacer el dibujo. (Soluc: $5/2$ u²)
24. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3,1) y forma 45° con el eje OX^+ (Soluc: $y=x-2$)
25. a) ¿Qué ángulo forma la recta $3x-2y+6=0$ con el eje de abscisas? (Soluc: $\cong 56^\circ 18' 36''$)
 b) ¿Qué ángulo forma la recta $2x-y+5=0$ con el eje de ordenadas? (Soluc: $\cong 26^\circ 33' 54''$)
 c) Calcular n de modo que la recta $3x+ny-2=0$ forme un ángulo de 60° con OX^+ (Soluc: $n=-\sqrt{3}$)
26. Resolver gráficamente –es decir, hallar gráficamente el posible punto de corte de cada pareja de rectas– los siguientes sistemas de ecuaciones:
- $\left. \begin{array}{l} \text{a) } 2x + 3y = 11 \\ 3x - 2y = -3 \end{array} \right\}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{b) } 2x + 3y = 11 \\ 6x + 9y = 33 \end{array} \right\}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{c) } 2x + 3y = 11 \\ 6x + 9y = 3 \end{array} \right\}$
 (Soluc: (1,3); ∞ soluc; \nexists soluc)
27. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de las rectas $2x+3y-4=0$ y $x-y=0$ y por A(2,1) (Soluc: $x-6y+4=0$)
 b) Ídem para las rectas $3x+y-11=0$ y $x+2y-7=0$ y el punto A(-1,2) (Soluc: $y=2$)
28. La recta $y+2=m(x+3)$ pasa por el punto de intersección de las rectas $2x+3y+5=0$ y $5x-2y-16=0$. Calcular m (Soluc: $m=-1/5$)

Posición relativa de 2 rectas:

29. Dadas las rectas: r: $2x+3y-4=0$ u: $4x+6y-8=0$
 s: $x-2y+1=0$ v: $2x-4y-6=0$
 t: $3x-2y-9=0$ w: $2x+3y+9=0$

¿Cuáles son coincidentes? ¿Cuáles son paralelas? (Soluc: $r=u$; $s//v$; $t//w$)

30. Ídem para las rectas r: $y=5x-3$ u: $y=3x-2$
 s: $y=-x+2$ v: $y=2x+13$
 t: $y=2x-1$ w: $y=-x-3$

Comprobar el resultado dibujándolas sobre los mismos ejes. (Soluc: $t//v$; $s//w$)

31. Comprobar, por dos métodos, si las siguientes rectas son paralelas, secantes o coincidentes; en este último supuesto, hallar el punto de corte:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 3x + 2y + 7 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} x + 3y - 4 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{c) } \left. \begin{array}{l} x + y - 3 = 0 \\ 2x + 2y - 6 = 0 \end{array} \right\}$$

(Soluc: a) paralelas; b) secantes en (7,-1); c) coincidentes)

32. Determinar **m** y **p** para que las rectas $mx+3y+5=0$ y $2x+6y-p=0$

a) Sean coincidentes. (Sol: $m=1; p=-10$)
b) Se corten en (-1,2) (Sol: $m=11; p=10$)

33. a) Dadas las rectas $3x-4y+1=0$ calcular **m** para que sean paralelas. ¿Pueden ser coincidentes?
 $mx+8y-14=0$ (Soluc: $m=-6; NO$)

b) Ídem para las rectas $4x-3y+1=0$ (Soluc: $m=-8; NO$)
 $mx+6y+4=0$

34. La recta $3x+ny-7=0$ pasa por el punto A(2,3) y es paralela a la recta $mx+2y=13$. Calcular **m** y **n**
(Soluc: $m=18; n=1/3$)

35. Dada la recta **r** determinada por A(2,1) y $\vec{u}=(a,4)$, y la recta **s** determinada por B(-1,4) y $\vec{v}=(5,3)$

a) Hallar **a** para que r y s sean paralelas (Soluc: $a=20/3$)

b) ¿Para qué valores de **a** son secantes? (Soluc: $a \neq 20/3$)

c) ¿Pueden ser coincidentes? (soluc: NO)

Recta // a una dada:

36. a) Calcular la ecuación de la recta paralela a $3x+2y-4=0$ que pasa por el punto A(2,3) (Soluc: $3x+2y-12=0$)

b) Ídem para $y=2x+3$ (Soluc: $y=2x-1$)

37. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (2,3) y es: a) Paralela al eje x (Soluc: $y=3$)

(Hacer un dibujo explicativo previo en los cuatro b) Paralela al eje y (Soluc: $x=2$)

primeros apartados)

c) Paralela a la bisectriz del 1^{er} cuadrante.

(Soluc: $y=x+1$)

d) Ídem del 2^o cuadrante. (Soluc: $y=-x+5$)

e) Paralela a $5x+2y=0$ (Soluc: $5x+2y-16=0$)

38. Hallar la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta determinada por A(1,1) y B(-3,6)

(Soluc: $y = -\frac{5}{4}x$)

39. Dadas las rectas r: $x-2y+7=0$

s: $2x+y+4=0$

y el punto P(5,1), hallar las ecuaciones de los otros dos lados del paralelogramo formado por r, s y P.

(Soluc: $x-2y-3=0$ y $2x+y-11=0$)

40. **TEORÍA:** Responder, razonadamente, a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cómo son los vectores directores de dos rectas paralelas?

- b) Si se sabe que el vector director de una recta es $(2,5)$, ¿podemos conocer su pendiente?
- c) Y si sabemos que la pendiente es 3, ¿podemos obtener un vector director?
- d) ¿Cuántos vectores directores puede tener una recta?
- e) Si una recta tiene por vector director $(4,2)$ y otra tiene el $(-2,-1)$, ¿pueden ser la misma?
- f) Razonar que si una recta tiene la forma $Ax+By+k=0$, entonces cualquier recta \perp a ella sería de la forma $Bx-Ay+k'=0$
- g) ¿Por qué toda recta que pasa por el origen carece de término independiente en su forma general i.e. $Ax+By=0$?
- h) De una recta se sabe que su $\vec{u}_r = (2, -4)$ ¿Cuál es su pendiente? ¿Cómo es la recta?

Puntos y rectas notables de un triángulo:

Recta \perp a una dada:

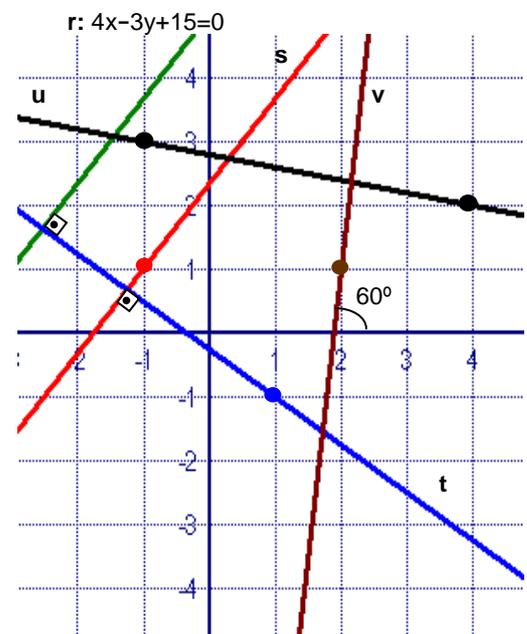
41. En cada apartado, hallar la recta \perp a la dada, por el punto que se indica (hacer un dibujo aproximado explicativo):

- | | |
|---|---|
| a) $x-2y+3=0$; $P(3,-1)$ (Soluc: $2x+y-5=0$) | e) $y=2x-5$; $P(-2,3)$ (Soluc: $x+2y-4=0$) |
| b) $3x+2y+1=0$; $P(1,-1)$ (Soluc: $2x-3y-5=0$) | f) $y-3=2(x+1)$; $O(0,0)$ (Soluc: $x+2y=0$) |
| c) $\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{array} \right\}$; $P(1,3)$ (Soluc: $x-3y+8=0$) | g) $x+2y-17=0$; $P(3,7)$ (Soluc: $2x-y+1=0$) |
| d) $y-4=2(x-1)$; $P(1,1)$ (Soluc: $x+2y-3=0$) | h) $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{7}$; $P(-4,-5)$ |

42. En la figura, $s \parallel r$ y $t \perp r$. Hallar:

- a) La ecuación general de las rectas s , t y u
(Soluc: $s: 4x-3y+7=0$; $t: 3x+4y+1=0$; $u: x+5y-14=0$)
- b) La ecuación punto-pendiente de v (Soluc: $y-1=\sqrt{3}(x-2)$)

43. Hallar el pie de la perpendicular trazada desde $P(1,-2)$ a la recta $r: x-2y+4=0$ (Soluc: $(-4/5, 8/5)$)



Mediatriz:

44. a) Hallar las coordenadas del punto medio del segmento determinado por $A(-2,1)$ y $B(6,5)$. Dibujar la situación. (Sol: $M(2,3)$)
- b) El punto $M(5,-2)$ es el punto medio del segmento AB , y conocemos $A(2,3)$. Hacer un dibujo explicativo y hallar B . (Sol: $B(8,-7)$)
- c) Hallar el punto simétrico de $P(1,-2)$ respecto del punto $Q(3,0)$. Hacer un dibujo explicativo. (Sol: $P'(5,2)$)
45. Hallar la ecuación de la recta \perp al segmento de extremos $A(5,6)$ y $B(1,8)$ en su punto medio. ¿Cómo se llama dicha recta? Hacer un dibujo explicativo. (Soluc: $2x-y+1=0$; mediatriz)
46. La recta $3x-2y-6=0$ corta a los ejes en dos puntos A y B . Calcularlos y hallar la mediatriz de \overline{AB} . (Soluc: $4x+6y+5=0$)

47. Dada la recta $x+2y+1=0$ hallar el punto simétrico de $P(2,-3)$ respecto a dicha recta. [Soluc: $P'(16/5,-3/5)$]



* 48. Sabiendo que la recta $2x-y+1=0$ es mediatriz de \overline{AB} y $A(2,-3)$, calcular B. ¿Cómo podríamos comprobar que el resultado es correcto? [Soluc: $B(-22/5, 1/5)$]

Bisectriz:

49. Dado el triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(5,-3)$ y $C(7,13)$, hallar razonadamente, mediante cálculo vectorial, la ecuación de la bisectriz correspondiente al vértice A. (Ayuda: Dado un punto genérico $X(x,y) \in$ bisectriz, plantear que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AX}$) (Soluc: $x-8y+6=0$)

NOTA: Cuando se aborde más adelante el cálculo de la distancia punto-recta, se verá otro método mucho mejor para hallar la bisectriz (vid. ejercicio 94).

Mediana, altura, etc:

50. Dado el triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(5,3)$ y $C(3,7)$ se pide:

a) Mediante la fórmula correspondiente, hallar las coordenadas del baricentro o centro de gravedad (Por curiosidad, se recomienda obtener la ecuación de dos medianas cualesquiera y comprobar que se cortan en dicho punto)

b) Ecuaciones de dos alturas cualesquiera, y coordenadas del ortocentro.

c) Ecuaciones de dos mediatrices cualesquiera, y coordenadas del circuncentro.

d) Calcular la ecuación de la recta de Euler.

e) Comprobar que el ortocentro dista el doble del centro de gravedad que el circuncentro.

(Soluc: a) $AB: x=3; BC: 4x-3y-1=0; G(3,11/3)$

b) $AB: 2x+y-13=0; BC: x-2y+1=0; AC: x+3y-14=0; O(5,3)$

c) $AB: 2x+y-8=0; BC: x-2y+6=0; AC: x+3y-14=0; C(2,4)$

d) $x+3y-14=0$

51. Dibujar en unos ejes cartesianos el triángulo de vértices $A(2,0)$, $B(0,1)$ y $C(-3,-2)$, y hallar:

a) La ecuación de la mediana correspondiente al lado AC. (Soluc: $4x-y+1=0$)

b) La ecuación de la altura correspondiente al lado AC. (Soluc: $5x+2y-2=0$)

c) La ecuación de las mediatrices correspondientes a AB y AC. (Soluc: $4x-2y-3=0; 10x+4y+9=0$)

d) ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las anteriores? Obtenerlo (Sol: Circuncentro $(-1/6, -11/6)$)

52. Dibujar el triángulo de vértices $A(3,1)$, $B(0,2)$ y $C(1,-2)$, y hallar:

a) La ecuación de la mediana correspondiente al lado AC (Soluc: $5x+4y-8=0$)

b) Las ecuaciones de las alturas correspondientes a los lados AC y BC (Sol: $2x+3y-6=0; x-4y+1=0$)

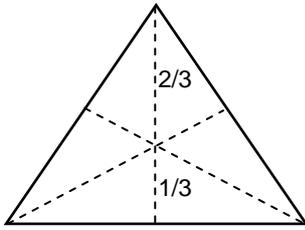
c) ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las alturas? Obtenerlo. (Soluc: Ortocentro $(21/11, 8/11)$)

d) La ecuación de la mediatriz correspondiente al lado AC (Soluc: $4x+6y-5=0$)

* 53. Los puntos $B(-1,3)$ y $C(3,-3)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles ABC. El punto A está en la recta $x+2y-15=0$. Calcular A

54. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices $A(1,6)$, $B(-5,8)$ y $C(-3,-4)$

(Soluc: $4x-5y+26=0; 7x+4y+3=0; 11x-y+29=0$)



55. Demostrar que en un triángulo equilátero el baricentro está situado a una distancia de la base que es siempre $1/3$ de la altura (ver figura).
56. Los vértices de un triángulo son $A(7,5)$, $B(-8,3)$ y $C(4,-5)$
- Hallar las medianas AB y AC y el baricentro.
 - Ídem para alturas y ortocentro.
 - Ídem para mediatrices y circuncentro.

d) Trazar sobre papel milimetrado las tres medianas, alturas y mediatrices, y las circunferencias circunscrita e inscrita, y comprobar que el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados (Utilizar escala $1 u = 1 \text{ cm}$).

Ángulo de dos rectas:

57. Calcular el ángulo que forman los siguientes pares de rectas, utilizando la fórmula más conveniente en cada caso:

- | | | | | | |
|------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---|---------------|--------------------------------|
| a) $2x-3y+4=0$ | $5x-2y-3=0$ | (Soluc: $\cong 34^\circ 31'$) | i) $3x-4y+2=0$ | $3x-4y+7=0$ | (Soluc: 0°) |
| b) $2x+3y-5=0$ | $x-y+7=0$ | (Soluc: $\cong 78^\circ 41'$) | j) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$ | $-2x+3y-5=0$ | (Soluc: $\cong 22^\circ 37'$) |
| c) $x-2y+4=0$ | $3x-y-1=0$ | (Soluc: 45°) | k) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4}$ | $3x+4y=0$ | (Soluc: 90°) |
| d) $y=2x-3$ | $y=-2x+1$ | (Soluc: $\cong 53^\circ 8'$) | l) $3x+4y-12=0$ | $5x-12y+8=0$ | (Soluc: $\cong 59^\circ 29'$) |
| e) $y=3x-5$ | $y=3x+2$ | (Soluc: 0°) | m) $\left. \begin{array}{l} x=3+t \\ y=5-2t \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=-3+4\lambda \\ y=-1+3\lambda \end{array}$ | | (Soluc: $\cong 79^\circ 42'$) |
| f) $-x+2y+1=0$ | $3x+y+5=0$ | (Soluc: $\cong 81^\circ 52'$) | n) $y=7x+54$ | $3x-4y+128=0$ | (Soluc: 45°) |
| g) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4}$ | $\frac{x}{12} = \frac{y-3}{5}$ | (Soluc: $\cong 30^\circ 31'$) | | | |
| h) $-x+2y+5=0$ | $2x-3y+4=0$ | (Soluc: $\cong 7^\circ 8'$) | | | |

58. Razonar, sin cálculo previo, cuáles de los siguientes pares de rectas son perpendiculares:

- | | | | |
|----------------|-------------|--------------|-------------------------------------|
| a) $2x+3y-4=0$ | $4x+6y-8=0$ | e) $y=6x$ | $y=x/6-8$ |
| b) $2x+3y-4=0$ | $6x-4y+5=0$ | f) $x+y-8=0$ | $2x+3y+6=0$ |
| c) $y=2x-4$ | $y=-x/2+5$ | g) $y=x+1$ | $y=-x$ |
| d) $3x-2y+7=0$ | $4x+6y-3=0$ | | (Soluc: NO; Sí; Sí; Sí; NO; NO; Sí) |

59. ¿Es perpendicular la recta $2x+3y+4=0$ con otra que tenga de pendiente $3/2$? (Soluc: Sí)

60. Determinar el parámetro m con la condición de que las rectas $2x-4y+12=0$ sean perpendiculares.
(Soluc: $m=16$) $mx+8y-15=0$

61. Dadas las rectas $r: x+2y-3=0$ se pide: a) Hallar k para que sean // (Soluc: $k=-2$)
s: $x-ky+4=0$ b) Hallar k para que sean \perp (Soluc: $k=1/2$)
c) Hallar la ecuación general de la recta \perp a r que pasa por el origen. (Soluc: $2x-y=0$)

62. Determinar el valor de a para que las rectas $ax+(a-1)y-2(a+2)=0$ sean: a) Paralelas.
(Soluc: $a=0$ o $a=1/3$; $a=-1/2$) $3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$ b) Perpendiculares.

63. Calcular los coeficientes **m** y **n** de las rectas $mx-2y+5=0$
 $nx+6y-8=0$

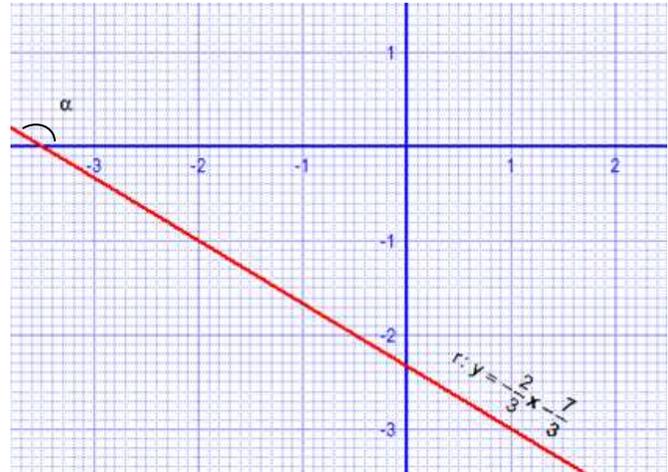
sabiendo que son perpendiculares y que la primera pasa por el punto (1,4) (Soluc: $m=3; n=4$)

64. Dada la recta de ecuación $ax+by=1$, determinar **a** y **b** sabiendo que la recta dada es perpendicular a la recta $2x+4y=11$ y que pasa por el punto $(1, 3/2)$ (Soluc: $a=4; b=-2$)

65. a) Hallar **m** para que la recta **r** de la figura sea // a $r': -4x+my+6=0$ (Soluc: $m=-6$)

b) Deducir α (redondeado a los minutos) a partir de la ecuación de **r**. (Soluc: $\cong 146^\circ 19'$)

c) Hallar el ángulo (redondeado a los minutos) que forma **r** con la bisectriz del primer cuadrante. (Soluc: $\cong 78^\circ 41'$)



66. Hallar el valor de **a** para que las rectas

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + a\lambda \end{array} \right\} \quad \text{formen } 45^\circ$$

(Aviso: puede haber dos soluciones) (Soluc: $a_1=6, a_2=-2/3$)

67. Sean las rectas **r**: $3x+my+12=0$
s: $2x+y+n=0$

Determinar **m** y **n** sabiendo que forman un ángulo de 60° y que la recta **s** pasa por el punto (3,-5) (Advertencia: puede haber dos soluciones) (Sol: $m_1=24+15\sqrt{3}$ y $n_1=-1$; $m_2=24-15\sqrt{3}$ y $n_2=-1$)

68. a) Determinar la ecuación de la recta que pasando por A(5,-2) forme 45° con la que tiene por ecuación $3x+7y-12=0$ (Advertencia: puede haber dos soluciones) (Soluc: $y+2 = \frac{2}{5}(x-5)$; $y+2 = -\frac{5}{2}(x-5)$)

b) ¿Cómo son las pendientes de las dos soluciones? ¿Por qué?

69. Hallar la ecuación de la recta que, pasando por P(2,-3), forma un ángulo de 45° con la recta $3x-4y+7=0$ (Advertencia: puede haber dos soluciones) (Soluc: $y+3 = -\frac{1}{7}(x-2)$; $y+3 = 7(x-2)$)

70. Hallar las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto (-3,0) y forman con la recta de ecuación $3x-5y+9=0$ un ángulo cuya tangente vale $1/3$ (Soluc: $y = \frac{2}{9}(x+3)$; $y = \frac{7}{6}(x+3)$)

71. Dadas las rectas **r**: $2x+y-4=0$ hallar **a** para que: a) Sean // (Soluc: $a=-4$)

s: $ax-2y+5=0$ b) Sean \perp (Soluc: $a=1$)

c) Formen 60° (Soluc: $a = \frac{16 \pm 10\sqrt{3}}{11}$)

d(P,r):

72. a) Calcular la distancia del punto P(1,2) a la recta $3x-4y+1=0$ (Soluc: $4/5$)

b) "" "" "" P(2,-1) a la recta $3x+4y=0$ (Soluc: $2/5$)

c) "" "" del origen a la recta $\left. \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \end{array} \right\}$ (Soluc: $3/\sqrt{5}$)

- d) "" "" del origen a la recta $y=4$ (Soluc: 4)
- e) "" "" del punto $P(-1,7)$ a la recta $y-3=2(x+3)$ (Soluc: 0)
- f) "" "" "" $P(1,-3)$ a la recta $\frac{x-1}{2}=y+5$ (Soluc: $4/\sqrt{5}$)
- g) "" "" "" $P(2,4)$ a la recta $y=-2x+3$ (Soluc: $\sqrt{5}$)

73. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por los puntos $A(-2,1)$ y $B(3,-2)$
(Soluc: $1/\sqrt{34}$)
74. Hallar la distancia del punto $(-1,1)$ a la recta que corta a los ejes Ox^+ y Oy^+ a las distancias 3 y 4 del origen. (Soluc: $13/5$)
75. Hallar la longitud del segmento que determina la recta $x-2y+5=0$ al cortar a los ejes de coordenadas.
(Soluc: $5\sqrt{5}/2$)
76. Hallar la distancia del punto $P(-1,2)$ al punto de corte de las rectas $x=2$ y $2x+y-2=0$ (Soluc: 5)
77. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasando por el punto $A(0,2)$ tiene de pendiente -1 (Soluc: $\sqrt{2}$)
78. Determinar c para que la distancia de la recta $x-3y+c=0$ al punto $(6,2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades. (Aviso: puede haber dos soluciones). Hacer un dibujo explicativo de la situación. (Soluc: $c=\pm 10$)
79. Calcular el valor de a para que la distancia del punto $P(1,2)$ a la recta $ax+2y-2=0$ sea igual a $\sqrt{2}$ (Aviso: puede haber dos soluciones). Hacer un dibujo explicativo. (Soluc: $a=2$)
80. Calcular las ecuaciones de las dos rectas que pasando por el punto $A(1,-2)$ disten 2 unidades del punto $B(3,1)$. Se recomienda hacer un dibujo previo. (Soluc: $y+2 = \frac{5}{12}(x-1)$; $x=1$)
81. Hallar la ecuación de las dos rectas paralelas de pendiente $3/4$ que distan 2 unidades del punto $(2,3)$. (Ayuda: se recomienda hacerlo en forma explícita). Hacer un dibujo de la situación.
(Sol : $y = \frac{3}{4}x + 4$; $y = \frac{3}{4}x - 1$)

d(r,s):

82. a) Hallar la distancia entre las rectas $2x+3y-6=0$ $2x+3y+7=0$ (Soluc: $\sqrt{13}$)
- b) "" "" "" "" $\left. \begin{matrix} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{matrix} \right\}$ $\frac{x+3}{-3} = y + 5$ (Soluc: $23/\sqrt{10}$)
- c) "" "" "" "" $3x-4y+16=0$ $2x-5y+2=0$ (Soluc: 0)
- d) "" "" "" "" $3x-4y+16=0$ $y = \frac{3}{4}x - 1$ (Soluc: 4)

83. Dada la recta $3x-4y+19=0$, se pide:
- a) Hallar la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por $P(5,6)$, en todas las formas conocidas.
(Soluc: $3x-4y+9=0$)
- b) Hallar la distancia entre las dos rectas anteriores. (Soluc: $2u$)
- c) Hallar el ángulo que dichas rectas forman con la recta $7x-y+3=0$ (Soluc: 45°)

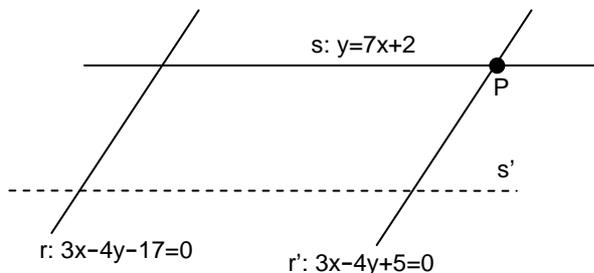
84. a) Hallar, en todas las formas conocidas, la ecuación de la recta **s** que tiene la misma pendiente que **r**: $y=3x-1$ y pasa por $P(-1,2)$ (Soluc: $3x-y+5=0$)
 b) Hallar la distancia entre las dos rectas **r** y **s** anteriores. (Soluc: $3\sqrt{10}/5 u$)
 c) Hallar el ángulo que forma **r** con la recta **t**: $x-2y+4=0$ (Soluc: 45°)

85. Dados los siguientes pares de rectas, hallar **m** para que sean paralelas y calcular su distancia:

- a) $3x-4y+1=0$ (Soluc: $m=-6$; $d=6/5$)
 $mx+8y-14=0$
 b) $mx+y=12$ (Soluc: $m=-4/3$; $d=107/15$)
 $4x-3y=m+1$
 c) $4x-3y+1=0$ (Soluc: $m=-8$; $d=3/5$)
 $mx+6y+4=0$

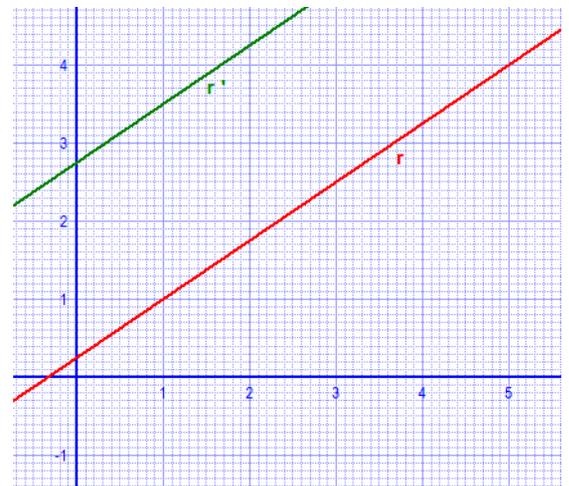
86. Calcular **c** para que la distancia entre las rectas $4x+3y-6=0$ y $4x+3y+c=0$ sea igual a 3 (Sol: $c_1=9$, $c_2=-21$)

87. Dadas las rectas de la figura adjunta (el dibujo es aproximado), se pide:



- a) Razonar que **r** y **s** son secantes, y $r \parallel r'$
 b) Hallar $P=r' \cap s$ (Soluc: $P(-3/25, 29/25)$)
 c) Hallar la ecuación general de **s'**, sabiendo que dista 5 unidades de **s**. (Soluc: $y=7x+2 \pm 25\sqrt{2}$)
 d) Hallar el ángulo entre **r** y **s**
 e) Hallar $d(r, r')$

88. a) Hallar la ecuación de la recta **r** de la figura en todas las formas conocidas. (Soluc: $3x-4y+1=0$)
 b) Hallar la ecuación general o implícita de la recta **r'** sabiendo que dista 2 unidades de **r** (¡No vale intentando obtener puntos de **r'** a partir de la gráfica!). (Soluc: $3x-4y+11=0$)
 c) Hallar la ecuación de la recta \perp a **r** que pasa por el origen, **en forma explícita**. (Soluc: $4x+3y=0$)



89. Dada la recta **r**: $x+y-3=0$ y el punto $P(-1,2)$, se pide:

- a) Hallar, en todas las formas conocidas, la ecuación de la recta \perp a **r** que pasa por **P** (Soluc: $x-y+3=0$)
 b) Hallar el punto **M** de corte de la recta anterior y **r** (Soluc: $(0,3)$)
 c) Hallar el punto simétrico de **P** respecto de **r**. Hacer un dibujo aproximado explicativo. (Soluc: $(1,4)$)
 d) Hallar la ecuación general de la recta \parallel a **r** que pasa por **P** (Soluc: $x+y-1=0$)
 e) Hallar la distancia entre la recta anterior y **r**. Hacer un dibujo aproximado explicativo. (Soluc: $\sqrt{2} u$)
 f) Hallar la posición relativa de **r** y la recta **s**: $2x-y+5=0$ (Soluc: Secantes)
 g) Hallar el ángulo entre **r** y **s** (Soluc: $71^\circ 33' 54''$)

90. Estudiar la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-5}$ y $s: 5x+2y+5=0$, y hallar su distancia. Dibujarlas. (Soluc: $4/\sqrt{29}$)

91. Hallar k para que las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-5}$ y $s: 5x+2y+k=0$ sean: a) Coincidentes. (Sol: 1)
b) Disten 2 unidades (Sol: $1 \pm 2\sqrt{29}$)

92. a) Hallar la ecuación de la recta s paralela a la recta r de la figura y que pasa por el punto $P(1,-3)$, en todas las formas conocidas. (Soluc: $x+y+2=0$)

b) Estudiar la posición relativa de la recta s anterior y la recta $t: 3x-4y-1=0$

c) Dibujar t (en la cuadrícula adjunta).

d) Hallar el ángulo \hat{st} (aproximando a los minutos). (Soluc: $\cong 81^\circ 52'$)

e) Hallar la distancia de s a la bisectriz del 2º cuadrante. (Sol: $\sqrt{2}$)



Bisectriz:

* 93. a) Hallar las dos bisectrices del ángulo formado por $r: 4x+3y-5=0$ y $s: 3x+4y-2=0$. Comprobar que se trata de dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r y s . (Soluc: $x-y-3=0; x+y-1=0$)

b) Ídem con $r: 4x-3y+8=0$ y $s: 12x+5y-7=0$ (Soluc: $8x+64y-139=0; 112x-14y+69=0$)

94. Volver a hacer el ejercicio 49, pero aplicando la fórmula de la distancia punto-recta.

Área del triángulo:

95. a) Calcular el área del triángulo de vértices $A(1,2)$, $B(-1,4)$ y $C(2,0)$ (Sol: $1 u^2$)

b) " " " " " " " $A(2,-1)$, $B(-5,1)$ y $C(0,3)$ (Sol: $12 u^2$)

c) " " " " " " " $A(-3, -2)$, $B(9,7)$ y $C(2,8)$ (Sol: $37,5 u^2$)

96. a) Hallar el área del triángulo definido por las rectas $r: x=3$, $s: 2x+3y-6=0$, $t: x-y-7=0$ (Sol: $24/5 u^2$)

b) Hallar el área del triángulo definido por las rectas $r: y=5$, $s: 2x-y-3=0$, $t: x+y-3=0$ (Sol: $12 u^2$)

97. Hallar el área del cuadrilátero de vértices $A(-4,3)$, $B(0,5)$, $C(4,-2)$ y $D(-3,-2)$ (Soluc: $71/2 u^2$)

98. Determinar el área del paralelogramo $OABC$ y las ecuaciones de los lados AB y BC sabiendo que OA es la recta de ecuación $x-2y=0$, OC tiene de ecuación $3x+y=0$ y las coordenadas de B son $(3,5)$ (Soluc: $AB: 3x+y-14=0; BC: x-2y+7=0; 98/5 u^2$)

Cuestiones teórico-prácticas varias:

99. TEORÍA: a) Si la distancia entre dos rectas es cero, ¿podemos afirmar que son secantes?

- b)** Sean $r(A, \vec{u})$ y $s(B, \vec{u})$ dos rectas paralelas (por tener el mismo vector director). ¿Es cierto que $d(r,s)=d(A,B)$?
- c)** ¿Cómo son las pendientes de dos rectas perpendiculares? ¿Y si las rectas son paralelas?
- d)** A simple vista, sin necesidad de transformarlas, ¿podemos concluir que

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad y \quad s: y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

no son la misma recta? Razonar la respuesta.

100. TEORÍA: Estudiar si los siguientes pares de rectas son la misma recta:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a)} & \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases} & \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \end{cases} & \mathbf{b)} & \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \end{cases} & \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 + 7\lambda \end{cases} & \mathbf{c)} & \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases} & \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{cases} \end{array}$$

(Soluc: Sí, NO, NO)

101. TEORÍA: Demostrar que cualquier mediana siempre separa dos triángulos de igual superficie.