Números Complejos I

Conjugado, opuesto, representaciones gráficas. Tipos de complejos

1. Clasificar los siguientes números complejos en reales e imaginarios. Para cada uno, cuál es la parte real y cuál la imaginaria. a) (3i); b) 1/3-5/2 i; c) 6/5; d)-3i; e) 5i; f) 0; g) i; h) (1/3)-i.
2. Escribir tres números complejos imaginarios puros, tres números imaginarios y tres números reales.
3. Representar gráficamente los números complejos:
   a) (3+4i); b) -4; c) -2i; d) (-2+3i); e) (1+3i); f) (6-i); g) -2; h) 3i; g) (-1+i).
4. Representar gráficamente el opuesto y el conjugado de:
   a) -3+5i; b) 3-2i; c) 1-2i; d) -2+i; e) 6; f) 5i; g) 3; h) -4i.
5. Indicar cuáles de los siguientes números son reales, imaginarios o complejos:
   a) -9; b) -3i; c) -3i+1; d) $\sqrt{3}$+(1/2)i; e) (1/3)i; f) $\sqrt{2}$; g) -2i; h) (1+3i). Sol: R, I, C, C, I, R, I, C
6. Representar gráficamente los afijos de todos los números complejos z tales que al sumarlos con su respectivo conjugado, se obtenga dos; es decir: z+ $\bar{z}$ =2. Sol: recta x=1
7. Representar gráficamente los números complejos z tales que z- $\bar{z}$ =2. ¿Qué debe verificar z?.
   Sol: es imposible
8. Representar gráficamente los opuestos y los conjugados de a) -2-i; b) 1+i; c) 3i.
9. Escribir en forma trigonométrica y polar los complejos: a) 4+3i; b) -1+i; c) 5-12i.
   Sol: a) $5_{36,87º}$; b) $\sqrt{2}_{135º}$; c) $13_{292,6º}$
10. Escribir en las formas binómica y trigonométrica los números complejos: a) $3_{\pi/3}$; b) $3_{135º}$; c) $1_{270º}$.
    Sol: a) 3(cos60º+isen60º)=3/2+3 $\sqrt{3}$ /2 i; b) 3(cos135º+isen135º)=-3 $\sqrt{2}$ /2 +3 $\sqrt{2}$ /2 i; c) cos270º+isen270º=-i
11. Calcular tres argumentos del número complejo 1-i. Sol: a) 315º, 675º; 1035º
12. ¿Cuáles son el módulo y el argumento del conjugado de un número complejo cualquiera r_α.? Sol: $r_{360-\alpha}$.
13. Expresar en forma binómica y en forma polar el conjugado y el opuesto del número complejo: $6_{30º}$.
    Sol: a) $6_{330º}$, (3 $\sqrt{3}$ -3i); b) $6_{210º}$, (-3 $\sqrt{3}$ -3i)
14. Escribir en forma polar los números complejos: a) 6-8i; b) 2 + $\sqrt{14}$ i; c) -3+4i.
    Sol: a) $10_{306,9º}$; b) $4_{69,3º}$; c) $5_{126,9º}$
15. Escribir en forma binómica el complejo R=2(cos45º+isen45º). Representarlo gráficamente. Sol: a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$
16. El módulo de un número complejo es 5 y su argumento 600º. Escribir el número en forma trigonométrica. Sol: 5(cos240º+isen240º)
17. ¿Qué argumento tiene el siguiente número complejo?: 4(3-2i)+5(-2+i). Sol: 303,7º
18. Averiguar como debe ser un complejo r_α para que sea: a) un número real b) un número imaginario puro. Sol: a) α=0+kπ; b) α=π/2+kπ
19. . Escribir en forma polar: a) 1+ $\sqrt{3}$ i; b) -1+ $\sqrt{3}$ i; c) 1- $\sqrt{3}$ i; d) -1- $\sqrt{3}$ i; e) 3 $\sqrt{3}$ +3i; f) -3 $\sqrt{3}$ -3i.
    Sol: a) $2_{60º}$; b) $2_{120º}$; c) $2_{300º}$; d) $2_{240º}$; e) $\sqrt{6}_{30º}$, f) $\sqrt{6}_{210º}$
20. Escribir en forma binómica:a) $2_{60º}$; b) $1_{(3\pi/2)}$; c) $5_{450º}$; d) $2_{180º}$; e) $4_{750º}$; f) $6_{(\pi/3)}$.
    Sol: a) (1+ $\sqrt{3}$ i); b) -i; c) 5i; d) -2; e) (2 $\sqrt{3}$ +2i); f) (3+3 $\sqrt{3}$ i)
21. Escribir todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1,2) y radio 5.
    Sol: (5 cosα+1,(5 senα+2)i)
22. Escribir en forma polar y trigonométrica los números complejos: a) $\sqrt{3}$ +3i; b) 1-i; c) 2-2i.
    Sol: a) $\sqrt{12}_{60º}$, $\sqrt{12}$ (cos60º+isen60º); b) $\sqrt{2}_{225º}$, $\sqrt{2}$ (cos225º+isen225º); c) 2 $\sqrt{2}_{315º}$, 2 $\sqrt{2}$ (cos315º+isen315º)
23. Escribir en forma binómica y trigonométrica los números complejos: a) $6_{\pi/3}$,b) $2_{45º}$, c) $2_{300º}$.
    Sol: a) 6(cos60+isen60)=(3,3 $\sqrt{3}$ i); b) 2(cos45+isen45)=($\sqrt{2}$ + $\sqrt{2}$ i); c) 2(cos300+isen300) = 1- $\sqrt{3}$ i
24. Representar gráficamente los opuestos y los conjugados de: a) -3-i; b) 1+i; c) +3i.
25. Escribir en forma binómica: 6(cos30º+isen30º). Sol: 3 $\sqrt{3}$ -3i
26. Hallar el módulo y el argumento de: a) (1+i)/(1-i). b) (1+i)(2i). Sol: a) $1_{90º}$; b) $\sqrt{8}_{135º}$
27. ¿Qué figura representan en el plano los puntos que tienen de coordenadas polares 3_α , α variable? ¿y los que tienen $\rho_{90º}$, ρ variable?. Sol: a) circunferencia de centro (0,0) y radio 3; b) semieje OY positivo
28. Dado z = ρ_α . Expresar en forma polar: a) -z, b) z^{-1}, c) el conjugado de z, d) z^3.
    Sol: a) $\rho_{180º+\alpha}$; b) $\left(\frac{1}{\rho}\right)_{-\alpha}$; c) $\rho_{-\alpha}$; d) ${\rho^3}_{3\alpha}$

Sumas, restas, productos, divisiones, mixtos

1. Efectuar las siguientes operaciones entre números complejos:
a) (2+3i)+(4-i); b) (3+3i) - (6+2i); c) (3-2i) + (2+i) - 2(-2+i); d) (2-i)-(5+3i) + (1/2)(4-4i).
Sol: a) (6+2i); b) (-3+i); c) (9-3i); d) -1-6i

2. Multiplicar los siguientes números complejos:
a) (1+2i)(3-2i); b) (2+i) (5-2i); c) (i+1)(3-2i)(2+2i); d) 3(2-i)(2+3i)i. Sol: a) 7+4i; b) 12+i; c) 8+12i; d) -12+21i

3. Efectuar las siguientes divisiones de números complejos:
a) (2+i)/(1-2i); b) (7-i)/(3+i); c) (5+5i)/(3-i); d) (3-i)/(2+i); e) (18-i)/(3+4i). Sol: a) i; b) 2-i; c) 1+2i; d) 1-i; e) 2-3i

4. Efectuar las siguientes operaciones y simplificar:
a) 5-3[3+(2/3)i]; b) [2i (-i+2)] / (1+i); c) $[(-2i)^2(1+3i)]/(4+4i)$; d) [(1+3i)(1+2i)]/(1+i). Sol: a) -4-2i; b) 3+i; c) -2-i; d) 5i

5. Dado el número complejo z=2+2i, calcular y representar: a) su conjugado ($\bar{z}$); b) la suma $z+\bar{z}$;
c) el producto $z\cdot\bar{z}$. Sol: a) 2-2i; b) 4; c) 8

6. Calcular: a) (3+i)(2+i)-(1-i)(2-2i); b) (3-2i)+(1+2i)(6-2i)-(2-i); c) (3+2i)+(2-4i)6. Sol: a) (5+9i); b) 11+9i; c) 15-22i

7. Efectuar los siguientes productos y expresa el resultado en forma polar y binómica:
a) (cos30º+isen30º)[2(cos15º+isen15º)]
b) [2(cos23º+isen23º)] [3(cos37º+isen37º)];
c) $[5(\cos 33^\circ+i\,\mathrm{sen}33^\circ)]2_{57^\circ}$
d) (2+2i)(1-i); e) $(3+4i)1_{180^\circ}$.
Sol: a) $2_{45^\circ}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$; b) $6_{60^\circ}=3\ \sqrt{3}$ +3i); c) $10_{90^\circ}=10i$; d) $4_{0^\circ}=4$; e) $5_{233^\circ}=-3-4i$

8. Efectuar las operaciones: a) $1_{150^\circ}3_{30^\circ}$; b) $6_{60^\circ}:2_{15^\circ}$; c) $2_{20^\circ}1_{30^\circ}2_{70^\circ}$; d) $6_{(2\pi/3)}:3_{90^\circ}$; e) $(5_{\pi/9})^9$; f) $(2+2i)^4$.
Sol: a) 3_{180°; b) 3_{45°; c) 4_{120°; d) 2_{30°; e) 59_{180°; f) 64_{180°

9. Efectuar las operaciones: a) $2_{105^\circ}3_{85^\circ}$; b) $4_{65^\circ}:2_{15^\circ}$; c) $5_{22^\circ}2_{28^\circ}1_{30^\circ}$; d) $4_{150^\circ}:2_{(\pi/2)}$; e) $(2_{20^\circ})^3$; f) $(3_{60^\circ})^4$
Sol: a) 6_{190}; b) 2_{50}; c) 10_{80}; d) 2_{60}; e) 8_{60}; f) 81_{240}

10. Calcular el inverso de los números complejos siguientes y representar gráficamente el resultado:
a) $2_{(\pi/2)}$ b) 4i c) -3+i. Sol: a) $(1/2)_{(-\pi/2)}$; b) -0,25i; c) (-3/10)-(1/10)i

11. ¿Cómo es gráficamente el inverso de un número complejo?. ¿Cuál es su módulo?. ¿Y su argumento?.
Sol: a) perpendicular; b) módulo=(1/r), argumento=-α

12. Simplificar las expresiones: $a)\ \dfrac{3_{45^\circ}2_{15^\circ}}{6_{30^\circ}},\ \ b)\ \dfrac{2_{30^\circ}3_{60^\circ}}{3_{120^\circ}1_{300^\circ}},\ \ c)\ \dfrac{2_{45^\circ}2_{15^\circ}}{4_{90^\circ}}$ Sol: a) 1_{30°; b) 2_{30°; c) 1_{330°

13. Efectuar algebraica y gráficamente las operaciones con números complejos:
a) (3+2i)+(2-3i); b) (-3+2i)+(-2-i); c) (2-i)i; d) (-2+i)i. Sol: a) (5-i); b) (-5+i); c) (1+2i); (-1-2i)

14. Calcular los siguientes productos:
a) 2(cos23º+isen23º).5(cos12º+isen12º). b) $(1+i)(2_{30^\circ})$. c) 2(cos18º+isen18º) (3_{22°).
Sol: a) 10(cos35º+isen35º); b) (-1+ $\sqrt{3}$)+(1+ $\sqrt{3}$)i; c)6_{40°

15. Resolver las ecuaciones: a) $x^3-27=0$ b) $x^5+32=0$. Sol: a) x=3; $x=3_{120^\circ}$; $x=3_{240^\circ}$; b) $2_{36^\circ+72^\circ k}$ k=0,1,2,3,4

16. Dados z=(1,3), w=(2,1) Hallar z-w; zw; z^{-1}. Sol: a) -1+2i; b) -1+7i; c) (1/10)-(3/10i)

17. Dados z=-1+3i, w=-2+i. Calcular y representar a) z+w; b) zw; c) z^2, d) $z+\bar{w}$; e) z/w.
Sol: a) -3+4i; b) -1-7i; c) -8-6i; d) -3+2i; e) 1-i

18. Efectuar las siguientes operaciones: a) $6_{90^\circ}\sqrt{2}_{\ 15^\circ}$. b) $8_{120^\circ}/4_{\pi/2}$. Sol: a) $6\sqrt{2}_{\ 105^\circ}$, b) 2_{30°

19. Hallar $\dfrac{i^{32}i^{17}}{i^2i^3}$ Sol: 1

20. Hallar el módulo de los complejos: a) z=-2i(1+i)(-2-2i)(3); y b) $w=\dfrac{(2-i)\cdot(-1+2i)}{(1-i)\cdot(1+i)}$ Sol: a) 24; b) 5/2

21. Representar gráficamente las sumas: a) (-i)+(3-i); b) (-2+i)+(3-2i).

22. Representar gráficamente el número complejo 3-2i. Aplicarle un giro de 90º alrededor del origen.
¿Cuál es el nuevo número complejo?. Multiplica ahora 3-2i por i. Sol: 2+3i; 12+5i

23. Hallar el módulo de $z=\dfrac{2-4i}{4+2i}$. Sol: |z|=1