1 Magnitudes físicas y unidades

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1 Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$; $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$, calcula:

a) $-\vec{u}$
b) $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$
c) $2\vec{u}$ y $-3\vec{v}$

a) $-\vec{u} = -(3\vec{i} + 6\vec{j}) = -3\vec{i} - 6\vec{j}$
b) $\vec{u} + \vec{v} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + (\vec{i} - 2\vec{j}) = 4\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - (\vec{i} - 2\vec{j}) = 2\vec{i} + 8\vec{j}$
c) $2\vec{u} = 2(3\vec{i} + 6\vec{j}) = 6\vec{i} + 12\vec{j}$; $-3\vec{v} = -3(\vec{i} - 2\vec{j}) = -3\vec{i} + 6\vec{j}$

1.2 Dados los vectores en el espacio $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{r} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, calcula:

a) Sus módulos.
b) Su suma.
c) $\vec{v} - \vec{r}$

a) $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ $\qquad |\vec{r}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$
b) $\vec{v} + \vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} + (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 3\vec{i}$
c) $\vec{v} - \vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} - (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

1.3 El universo comenzó con una gran explosión (*Big bang*), que tuvo lugar hace unos quince mil millones de años. ¿Cuál es el orden de magnitud de la edad del universo en años?

El orden de magnitud de un número es la aproximación del número a la potencia de 10 más próxima. Por lo tanto, el orden de magnitud de la edad del universo en años ($1{,}5 \cdot 10^{10}$) es 10.

1.4 El colesterol en sangre se mide en miligramos de colesterol por decilitro de sangre. ¿Cuál es el valor de 163 mg dL^{-1} en unidades del SI?

$$\left(163\,\frac{\text{mg}}{\text{dL}}\right) \cdot \left(\frac{1\ \text{kg}}{10^6\ \text{mg}}\right) \cdot \left(\frac{10\ \text{dL}}{1\ \text{L}}\right) \cdot \left(\frac{10^3\ \text{L}}{1\ \text{m}^3}\right) = 1{,}63 \cdot 10^{-3}\ \text{kgm}^{-3}$$

1.5 Indica con cuántas cifras significativas se dan las siguientes constantes físicas:

a) Masa del electrón: $9{,}109 \cdot 10^{31}$ kg
b) Constante de gravitación universal: $G = 6{,}6725 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$

Teniendo en cuenta que: i) los dígitos distintos de cero son siempre significativos; y ii) los ceros que aparecen entre dígitos distintos de cero son siempre significativos, se concluye que el número de cifras significativas de las constantes dadas es:

a) Cuatro.

b) Cinco.

1.6 **Expresa la cantidad 2400 s con dos, tres, cuatro y cinco cifras significativas. ¿Cómo se expresa en horas con cada una de las cifras significativas pedidas?**

$$2400\ (s) \cdot \frac{1\ (h)}{3600\ (s)} = 0,\widehat{6}\ h$$

2 cifras significativas: $2,4 \cdot 10^3$ s y $6,7 \cdot 10^{-1}$ h

3 cifras significativas: $2,40 \cdot 10^3$ s y $6,67 \cdot 10^{-1}$ h

4 cifras significativas: $2,400 \cdot 10^3$ s y $6,667 \cdot 10^{-1}$ h

5 cifras significativas: $2,4000 \cdot 10^3$ s y $6,6667 \cdot 10^{-1}$ h

1.7 **Sabiendo que el valor real de una medida es 2,34 m, ¿cuál de las siguientes estará dada con mayor precisión: 2,33 m o 2,435 m? ¿Por qué?**

La precisión expresa la incertidumbre en el valor medido; esta puede deberse a la falta de coincidencia entre las medidas repetidas de una misma magnitud o bien a la poca sensibilidad del aparato de medida utilizado. Por tanto, la medida 2,435 m, que aprecia milímetros, está dada con más precisión que 2,33 m, que solo aprecia centímetros. Esto es así con independencia de que la medida 2,435 sea menos exacta que 2,33 m, ya que la exactitud representa la coincidencia entre el valor medido y el verdadero.

1.8 **¿Cuál es la incertidumbre de un voltímetro analógico que tiene la más fina de sus escalas en milivoltios?**

Cuando el aparato es analógico, se acepta como incertidumbre el valor de la división más pequeña multiplicado por 0,5. Por lo tanto, la incertidumbre en una medida hecha con el voltímetro dado es $\pm 0,5$ mV.

1.9 **El valor aceptado de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es $g = 9,81\ m s^{-2}$. Halla el error absoluto y el error relativo que se comete al utilizar $g = 10\ m s^{-2}$.**

El error absoluto, E_a, se define como la diferencia entre el valor verdadero (o valor aceptado) de la cantidad medida (x) y el valor medido (x_i):

$$E_a = x - x_i$$

Mientras que el error relativo, se define como:

$$E_r = \frac{|E_a|}{x} \quad \text{o bien como} \quad E_r\ (\%) = \frac{|E_a|}{x} \cdot 100$$

Sustituyendo valores, los errores resultan:

$$E_a = 9,81\ m s^{-2} - 10,00\ m s^{-2} = -0,19\ m s^{-2} \qquad E_r\ (\%) = \frac{|E_a|}{x} \cdot 100 = \frac{0,19\ (m s^{-2})}{9,81\ (m s^{-2})} \cdot 100 = 1,94\%$$

1.10 **Con un amperímetro que aprecia décimas de amperio, medimos la intensidad que recorre un electrodoméstico casero. El valor medio obtenido es I = 2,77 A, y la desviación estándar es $\sigma = 0,4$. Expresa el resultado de forma correcta.**

La incertidumbre debida a la resolución del amperímetro es: $\epsilon_{res} = \pm 0,1$ A. El error estimado de la medida es, pues:

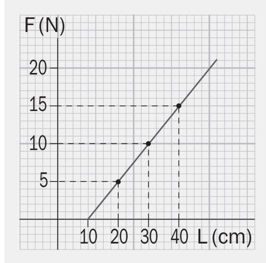
$$\Delta I = \text{máx}(\sigma, \epsilon_{res}) = \text{máx}(0,4,\ 0,1\ A) = 0,4\ A$$

El resultado de la medida debe expresarse como:

$$m = (2,8 \pm 0,4)A$$

El valor medio se ha redondeado a 2 cifras significativas, ya que la incertidumbre está en las décimas de amperio (el valor de la medida debe tener la misma precisión que el error).

1.11 La siguiente gráfica representa la longitud de un muelle cuando se tira de él con diferentes fuerzas. Calcula:



a) La longitud natural del muelle.

b) La fuerza que hay que aplicar para obtener una elongación de 35 cm.

c) Las constantes c_1 y c_2 de la ecuación:

$$F = c_1L + c_2$$

a) Cuando no se ejercen fuerzas, la longitud del muelle es 10 cm.

b) Relacionando los valores de ambos ejes mediante la gráfica se comprueba que para una fuerza de 12,5 N, la elongación es 35 cm.

c) Se establece un sistema de ecuaciones con los datos de dos puntos de la gráfica:

$$\left.\begin{array}{l} 10 = 30c_1 + c_2 \\ 15 = 40c_1 + c_2 \end{array}\right\} c_1 = 50\ \text{N}\,\text{m}^{-1}; \quad c_2 = -5\ \text{N}$$

1.12 Los siguientes datos representan la relación entre la presión y el volumen:

a) Dibuja la gráfica.

b) ¿Cómo es la relación entre las variables?

c) Escribe la ecuación matemática que las relaciona.

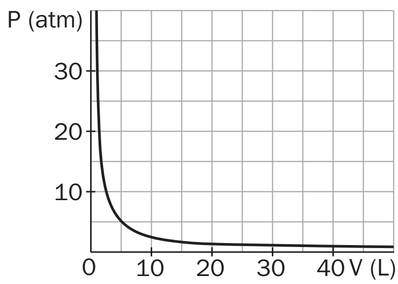
P(atm)	V(L)
1	25
2	12,5
2,5	10
5	5
10	2,5
25	1

a) La gráfica obtenida es una hipérbola.

b) La presión es inversamente proporcional al volumen: al aumentar V, disminuye P.

c) Cuando la relación es inversa, el producto de las magnitudes es constante. Por consiguiente, la ecuación que relaciona la presión y el volumen es:

$$P \cdot V = \text{cte} \Rightarrow P = \frac{\text{cte}}{V}$$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

LAS MAGNITUDES FÍSICAS. LAS UNIDADES

1.13 Identifica las siguientes cantidades como vectores o escalares:

a) 5 $\text{m}\,\text{s}^{-1}$ este

b) 6 kg

c) 27° C

d) 735 N hacia abajo

a) Vector; b) Escalar; c) Escalar; d) Vector.

1.14 Plutón, cuya masa es $1{,}27 \cdot 10^{22}$ kg, ha sido eliminado de la lista de los planetas del sistema solar, encabezada por Júpiter, el más masivo de todos, con una masa de $1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg. ¿Cuántos órdenes de magnitud es la masa de Júpiter mayor que la de Plutón?

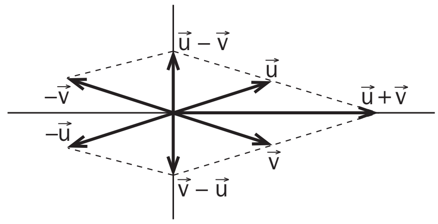
El cociente entre la masa de Júpiter y la de Plutón es:

$$\frac{1{,}9 \cdot 10^{27}}{1{,}27 \cdot 10^{22}} = 1{,}5 \cdot 10^{5}$$

Por tanto, la masa de Júpiter es 5 órdenes de magnitud mayor que la de Plutón.

1.15 Dados los vectores $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$, determina, gráficamente, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{u}$. ¿Qué relación hay entre los vectores $\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{u}$?

Los vectores $\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{u}$ son opuestos, ya que tienen el mismo módulo y la misma dirección pero sentido opuesto, de modo que su suma es igual a cero.



1.16 Dos vectores velocidad están expresados en componentes cartesianas como $\vec{v}_1 = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ (m s^{-1}) y $\vec{v}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$ (m s^{-1}). Halla las componentes cartesianas y el módulo de los vectores:

a) $-2\vec{v}_1$

b) $\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$

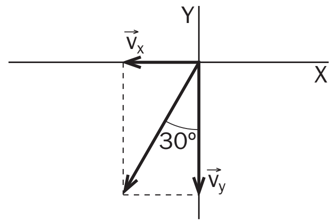
a) $-2\vec{v}_1 = -2(3\vec{i} - 4\vec{j}) = -6\vec{i} + 8\vec{j}$ (m s^{-1}); $\quad |-2\vec{v}_1| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$ m s^{-1}

b) $\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = (3\vec{i} - 4\vec{j}) + 3(-\vec{i} + 2\vec{j}) = +2\vec{j}$ (m s^{-1}); $\quad |\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$ m s^{-1}

1.17 Si se escogen el norte y el este como direcciones perpendiculares de referencia, ¿cuáles son las componentes de un vector velocidad, $\vec{v}$, de módulo 100 km h^{-1} y con una dirección 30° al oeste del sur?

$v_x = -v$ sen 30° $= -100$ km h$^{-1} \cdot 0{,}5 = -50$ km h^{-1}

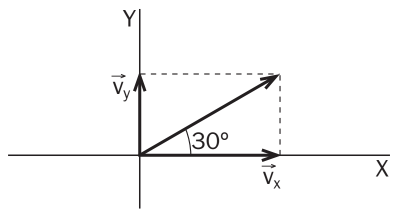
$v_y = -v \cos 30° = -100$ km h$^{-1} \cdot 0{,}866 = -86{,}6$ km h^{-1}



1.18 Una cuerda que forma un ángulo de 30° con la horizontal tira de un trineo que pretende arrastrar por el suelo. Calcula cuál debe ser el valor de la tensión de la cuerda si para arrastrar el trineo se necesita una fuerza horizontal de 40 N.

Si llamamos $\vec{T}$ a la tensión de la cuerda, su componente x es $T_x = 40$ N.
Por tanto, el módulo de la tensión de la cuerda resulta:

$$T_x = T \cos 30° \Rightarrow T = \frac{T_x}{\cos 30°} = \frac{40 \text{ N}}{0{,}866} = 46{,}2 \text{ N}$$



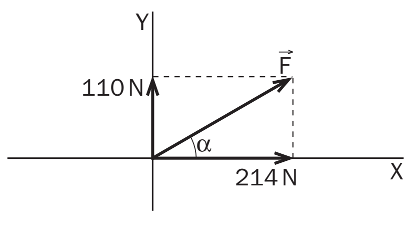
1.19 Un niño intenta levantar a su hermana de cinco años del suelo. Si la componente vertical de la fuerza F con la que tira de ella tiene una magnitud de 110 N, y la componente horizontal de 214 N, ¿cuál es la intensidad y la dirección de la fuerza F? ¿Puede levantar a la hermana si pesa 200 N?

Las componentes cartesianas de la fuerza son: $F_x = 214$ N y $F_y = 110$ N.
El módulo del vector fuerza resulta:

$$|\vec{F}| = \sqrt{214^2 + 110^2} = 240{,}6 \text{ N}$$

Si llamamos α al ángulo que forma la dirección de la fuerza con la horizontal, se tiene:

$$F_x = F \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{214{,}0 \text{ N}}{240{,}6 \text{ N}} = 27{,}2°$$



La componente vertical de la fuerza, que es la que contrarresta el peso, vale 110 N. Por tanto, el peso de la hermana no debe superar los 110 N para que la fuerza aplicada pueda levantarla del suelo.

1.20 En un partido de tenis, la altura de la red, en su punto central, debe ser exactamente de una yarda. Sabiendo que una yarda es igual a 3 pies y que un pie es igual a 12 pulgadas, calcula en unidades del SI la altura reglamentaria de la red de una pista de tenis.

Dato. 1 pulgada = 2,54 cm.

$$1\ (\cancel{\text{yarda}}) \cdot \left(\frac{3\ \cancel{\text{pies}}}{1\ \cancel{\text{yarda}}}\right) \cdot \left(\frac{12\ \cancel{\text{pulg}}}{1\ \cancel{\text{pie}}}\right) \cdot \left(\frac{2{,}54\ \cancel{\text{cm}}}{1\ \cancel{\text{pulg}}}\right) \cdot \left(\frac{1\ \text{m}}{100\ \cancel{\text{cm}}}\right) = 0{,}9144\ \text{m}$$

1.21 La concentración de oro en el agua del mar es de 0,010 $\mu g L^{-1}$ (mil veces menor de lo que pensaba F. Haber, premio Nobel en 1918, que fracasó en el intento de extraer oro del mar de forma rentable). Calcula la masa de oro (en kg) contenida en el agua de los océanos, cuyo volumen es $1{,}5 \cdot 10^9$ km^3.

$$1{,}5 \cdot 10^9\ (\cancel{\text{km}^3}) \cdot \left(\frac{10^{12}\ \cancel{\text{L}}}{1\ \cancel{\text{km}^3}}\right) \cdot \left(\frac{0{,}010\ \cancel{\mu\text{g}}}{1\ \cancel{\text{L}}}\right) \cdot \left(\frac{1\ \text{kg}}{10^9\ \cancel{\mu\text{g}}}\right) = 1{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{kg}$$

1.22 Comprueba que el capitán Nemo, en su increíble viaje al Polo Sur, no pudo recorrer 20000 leguas, ni aun en el caso de que el Nautilus, su fabuloso submarino, hubiera dado dos veces la vuelta a la Tierra.

Datos. 1 legua = 3,45 millas; 1 milla = 1609 m.
Radio de la Tierra = $6{,}37 \cdot 10^6$ m.

Expresada en metros, la longitud de 20000 leguas es:

$$2 \cdot 10^4\ (\text{Legua}) \cdot \frac{3{,}45\ (\cancel{\text{mi}})}{1\ (\cancel{\text{legua}})} \cdot \frac{1609\ (\text{m})}{1\ (\cancel{\text{mi}})} = 1{,}11 \cdot 10^8\ \text{m}$$

La longitud del ecuador terrestre es:

$$L = 2\pi R_T = 2\pi 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} = 4{,}00 \cdot 10^7\ \text{m}$$

Por tanto, la distancia recorrida al dar dos vueltas completas a la Tierra es $d = 2\ L = 8{,}00 \cdot 10^7$ m, que es inferior a 20000 leguas.

1.23 El iridio es el metal más resistente a la corrosión, y el segundo más denso (solo superado, escasamente, por el osmio). Expresa la densidad del iridio, d = 22,6 $g mL^{-1}$, en unidades del SI.

$$22{,}6 \left(\frac{\cancel{\text{g}}}{\cancel{\text{mL}}}\right) \cdot \frac{1}{1000} \left(\frac{\text{kg}}{\text{g}}\right) \cdot \frac{10^6}{1} \left(\frac{\cancel{\text{mL}}}{\cancel{\text{m}^3}}\right) = 2{,}26 \cdot 10^4\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

1.24 Cuando Feidippidas corrió desde Maratón hasta Atenas para dar la noticia de la victoria del general griego Milcíades sobre los persas, probablemente lo hizo a la velocidad de 92 estadios por hora. Sabiendo que 1 estadio era igual a 4 pletros y que 1 pletro son 30,8 m, expresa la velocidad a la que corrió el soldado griego en unidades del SI.

$$92 \left(\frac{\cancel{\text{est}}}{\cancel{\text{h}}}\right) \cdot \frac{4}{1} \left(\frac{\cancel{\text{plet}}}{\cancel{\text{est}}}\right) \cdot \frac{30{,}8}{1} \left(\frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{plet}}}\right) \cdot \frac{1}{3600} \left(\frac{\text{h}}{\text{s}}\right) = 3{,}15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1.25 La famosa equivalencia masa-energía descubierta por Einstein se expresa con la ecuación $E = mc^2$, donde E es la energía, m es la masa y c es la velocidad de la luz. Desglosa a partir de esta ecuación las unidades de la energía en el SI.

La ecuación de dimensiones de la energía es:

$$[E] = [m\ c^2] = M\left(\frac{L}{T}\right)^2 = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

Por tanto, la unidad de energía en el SI es: $kg m^2 s^{-2}$ (que recibe el nombre de julio).

1.26 **Basándote únicamente en la coherencia de unidades (homogeneidad), indica cuáles de las siguientes fórmulas no pueden ser correctas. En cada caso, A es el área, V es el volumen, L es la longitud de la circunferencia, y R, el radio:**

a) $A = 2\pi R$
b) $V = 2\pi R^2$
c) $L = \pi R^2$

a) La ecuación de dimensiones del área es: $[A] = L^2$; mientras que las dimensiones del segundo miembro de la ecuación dada resultan: $[2\pi R] = L$. Por tanto, esta ecuación no puede ser correcta, ya que no es homogénea.
b) La ecuación de dimensiones del volumen es: $[V] = L^3$; mientras que las dimensiones del segundo miembro de la ecuación dada es: $[2\pi R^2] = L^2$. Por tanto, esta ecuación no puede ser correcta, ya que no es homogénea.
c) La ecuación de dimensiones de la longitud es: $[L] = L$; mientras que las dimensiones del segundo miembro de la ecuación dada para la longitud de la circunferencia es: $[\pi R^2] = L^2$. Por tanto, esta ecuación no puede ser correcta, ya que no es homogénea.

1.27 **La ecuación general de una parábola es $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes. Teniendo en cuenta que x e y se miden en metros, ¿qué unidades y qué dimensiones debe tener cada una de las constantes para que la ecuación sea homogénea?**
(Una ecuación es homogénea cuando sus unidades son las mismas a ambos lados de la igualdad.)

Para que la ecuación sea homogénea, todos los sumandos del segundo miembro tienen que tener dimensiones de longitud y unidades de metros. Por tanto,

$[ax^2] = [a][x^2] = [a]L^2 = L \Rightarrow [a] = \dfrac{L}{L^2} = L^{-1}$ y, en consecuencia, a debe tener unidades de m^{-1}.

$[bx] = [b][x] = [b]L = L \Rightarrow [b] = \dfrac{L}{L} = L^0 = 1$, es decir, b debe ser adimensional.

$[c] = L \Rightarrow$ y, en consecuencia, c debe tener unidades de m.

1.28 **La ley de desintegración radiactiva es:**

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

donde N_0 es el número de núcleos radiactivos iniciales, N(t) es el número de átomos radiactivos que quedan al cabo de un tiempo t, y λ es una cantidad característica del núcleo conocida como constante de desintegración. ¿Cuáles son las dimensiones de λ?

Para que la ecuación sea homogénea, los dos miembros tienen que tener las mismas dimensiones. Por tanto,

$$[N] = [N_0 e^{-\lambda t}] = [N_0][e^{-\lambda t}] \Rightarrow [e^{-\lambda t}] = 1$$

Es decir, $e^{-\lambda t}$ debe ser adimensional ya que N(t) y N_0 tienen las mismas dimensiones. Para ello, el exponente debe ser, a su vez, adimensional:

$$[-\lambda t] = [\lambda][t] = [\lambda]T = 1 \Rightarrow [\lambda] = \frac{1}{T} = T^{-1}$$

1.29 **Según la tercera ley de Kepler, el período T de un planeta, es decir, el tiempo que tarda en completar una vuelta en torno al Sol, es proporcional a la potencia $\frac{3}{2}$ del semieje mayor de su órbita, que se denota por *a*:**

$$T = ka^{\frac{3}{2}}$$

¿Qué dimensiones tiene la constante de proporcionalidad k? Indica cuál será su unidad en el SI.

Para que la ecuación sea homogénea, los dos miembros tienen que tener las mismas dimensiones. Por tanto,

$$[T] = \left[ka^{\frac{3}{2}}\right] = [k]\left[a^{\frac{3}{2}}\right] = [k]L^{\frac{3}{2}} = T \Rightarrow [k] = \frac{T}{L^{\frac{3}{2}}} = TL^{-\frac{3}{2}}$$

CIFRAS SIGNIFICATIVAS. REDONDEOS

1.30 Una masa de 2,5 g de litio, el metal más ligero de todos, ocupa un volumen de 4,7 mL. ¿Por qué razón el siguiente resultado para la determinación de la densidad del litio es incorrecto?

$$d = \frac{2{,}5\ (\text{g})}{4{,}7\ (\text{mL})} = 0{,}53191\ \text{gmL}^{-1}$$

El resultado debe expresarse con solo 2 cifras significativas, ya que en las multiplicaciones y divisiones, la respuesta no debe tener más cifras significativas que el número con menos cifras significativas que aparece en la operación. Por tanto, el resultado del cociente anterior debe expresarse como $0{,}53\ \text{g} \cdot \text{mL}^{-1}$.

1.31 Expresada con siete cifras significativas, la velocidad de la luz en el vacío es $c = 2{,}997925 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}$. Indica cuál o cuáles de las siguientes expresiones son correctas:

a) $c = 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}$ b) $c = 3{,}00 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}$ c) $c = 3{,}000 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}$

a) Expresión correcta. Redondeada a 2 cifras significativas, el valor $c = 2{,}997925 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}$ queda $c = 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}$.

b) Expresión correcta. Redondeada a 3 cifras significativas, el valor $c = 2{,}997925 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}$ queda $c = 3{,}00 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}$.

c) Expresión incorrecta. Redondeada a 4 cifras significativas, el valor $c = 2{,}997925 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}$ queda $c = 2{,}998 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}$.

1.32 Expresa los números π y e redondeados a dos, cinco y siete cifras significativas.

$\pi = 3{,}141592654$ $e = 2{,}718281828$

Redondeados a dos, cinco y siete cifras significativas, los valores de π y e son, respectivamente:

$\pi = 3{,}1$ (2 c.s.); 3,1416 (5 c.s.) y 3,141593 (7 c.s.).

$e = 2{,}7$ (2 c.s.); 2,7183 (5 c.s.) y 2,718282 (7 c.s.)

1.33 En Física, muchas ecuaciones dependen del valor de 4π. Indica cuál es el valor de 4π cuando se utilizan los siguientes valores aproximados de π:

a) 3,142 b) 3,141593

a) $4\pi = 4 \cdot 3{,}142 = 12{,}568$ que, redondeado a 4 c.s., queda 12,57. Puesto que el valor de π utilizado en el cálculo solo viene expresado con 4 c.s., el resultado debe darse con solo 4 cifras significativas.

b) $4\pi = 4 \cdot 3{,}141593 = 12{,}566372$ que, redondeado a 7 c.s. queda 12,56637. Puesto que el valor de π utilizado en el cálculo solo viene expresado con 7 c.s., el resultado debe darse con solo 7 cifras significativas.

1.34 Expresa cada uno de los números siguientes con solo tres cifras significativas:

a) 10,061 m b) 0,003538 A c) 765,3 km d) 62000000 s

Aplicando las reglas del redondeo, resulta.

a) 10,1 m; b) 0,00354 A; c) 765 km; d) $6{,}20 \cdot 10^7$ s.

1.35 Un forense recogió tres muestras del escenario de un crimen cuyas masas eran, 2,11, 1,1 y 2 g. ¿Cuál es el valor de la masa total que recogió?

El resultado de una suma o una resta no puede tener más dígitos a la derecha de la coma decimal que los que tenga la medida con el menor número de decimales. Por tanto, el resultado de la suma: 2,11 g + 1,1 g + 2 g = = 5,21 g debe expresarse sin ninguna cifra decimal, ya que el sumando 2 g no tiene ninguna cifra decimal. La masa total resulta, pues, 5 g.

1.36 Un farmacéutico preparó una cápsula que contenía 0,210 g de un fármaco, 0,322 g de un segundo fármaco y 0,0007 g de un tercero. ¿Cuál es la masa total de la cápsula?

El resultado de una suma no puede tener más dígitos a la derecha de la coma decimal que los que tenga la medida con el menor número de decimales. Por tanto, el resultado de la suma: 0,210 g + 0,322 g + 0,0007 g = = 0,5327 g debe redondearse a tres cifras decimales, ya que hay dos sumandos con solo tres cifras decimales. La masa total debe expresarse como <u>0,533 g</u>.

1.37 A partir de una muestra de masa $2{,}88 \cdot 10^{-4}$ g de masa, se extrajeron 2,004 μg de una sustancia valiosa y rara. ¿Qué masa quedó después de la extracción?

Expresada también en gramos, el valor de la segunda masa es $2{,}004 \cdot 10^{-6}$ g. Se trata, pues, de efectuar la resta:

$$2{,}88 \cdot 10^{-4}\ (\mathrm{g}) - 2{,}004 \cdot 10^{-6}\ (\mathrm{g})$$

Los exponentes son diferentes, de modo que antes de efectuar la sustracción debemos cambiar uno de ellos. Cambiaremos 10^{-6} a 10^{-4} escribiendo 10^{-6} como $10^{-2} \cdot 10^{-4}$. (Se usa siempre el exponente mayor como exponente común.) Con la sustitución anterior, obtenemos:

$$2{,}004 \cdot 10^{-6} = 2{,}004 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} = 0{,}02004 \cdot 10^{-4}$$

Ahora se puede hacer la sustracción pedida:

$$\begin{array}{rcr} 2{,}88 \cdot 10^{-4} & = & 2{,}88 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{g} \\ -2{,}004 \cdot 10^{-6} & = & -0{,}020043 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{g} \\ \hline & & 2{,}85996 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{g} \end{array}$$

La respuesta debe redondearse al número correcto de cifras significativas. Sobre la base del exponente común de 10^{-4}, la mayor incertidumbre está en el lugar de las centésimas. La respuesta correcta será $2{,}86 \cdot 10^{-4}$ g.

1.38 La velocidad de la luz es $2{,}998 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}. Determina, con el número correcto de cifras significativas:

a) La distancia que recorre en 42,0 s.

b) La distancia que recorre en 42 s.

a) El módulo de la velocidad es el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo. Por tanto,

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow d = v\,t = 2{,}998 \cdot 10^{8}\ (\mathrm{m\,s^{-1}}) \cdot 42{,}0\ (\mathrm{s}) = 1{,}25916 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m\,s^{-1}} \rightarrow 1{,}26 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

El resultado se ha redondeado a 3 cifras significativas ya que el segundo factor (correspondiente al tiempo) viene expresado con tres cifras significativas.

b) Ahora, el resultado se redondea a 2 cifras significativas ya que el tiempo viene expresado con solo dos cifras significativas.

$$d = v\,t = 2{,}998 \cdot 10^{8}\ (\mathrm{m\,s^{-1}}) \cdot 42\ (\mathrm{s}) = 1{,}25916 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m\,s^{-1}} \rightarrow 1{,}3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

1.39 El resultado de la medida de la masa de una pieza de oro rojo (50% oro y 50% cobre) viene dado por 34,582 g. Explica si dicha medida se podría haber realizado con una balanza que apreciase décimas de gramo.

No, ya que si se utilizase una balanza que solo aprecia décimas de gramo, la resolución del aparato sería $\epsilon_{res} = 0{,}1$ g, de modo que la incertidumbre estaría en las décimas de gramo. Para poder expresar el resultado como 34,582 g se necesita medir con una precisión mucho mayor, que permita apreciar las milésimas de gramo.

1.40 Un disco compacto (CD) tiene aproximadamente 12 cm de diámetro. Calcula su área en m^2. Expresa el resultado en notación científica y con el número correcto de cifras significativas.

$$A = \pi R^2 = \pi \left(\frac{0{,}12\ \mathrm{m}}{2}\right)^2 = 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^2$$

El valor del diámetro limita el resultado a 2 cifras significativas, de modo que el resultado de la operación anterior se ha redondeado a solo 2 c. s. El número 2, que relaciona el diámetro con el radio, es un número exacto y no limita el número de cifras significativas.

1.41 El aceite se extiende sobre el agua formando una capa de $1{,}0 \cdot 10^2$ nm. Si se vertiera un barril de crudo, ¿cuántos km² de océano se cubrirían a causa de la marea negra formada?

Datos. 1 barril = 31,5 galones; 1 galón = 4 qt; 1 L = 1,057 qt.

Expresados en unidades del SI, los datos dados, resultan:

$$V = 1\ \cancel{\text{barril}} \cdot \left(\frac{31{,}5\ \cancel{\text{gal}}}{1\ \cancel{\text{barril}}}\right) \cdot \left(\frac{4\ \cancel{\text{qt}}}{1\ \cancel{\text{gal}}}\right) \cdot \left(\frac{1\ \cancel{\text{L}}}{1{,}057\ \cancel{\text{qt}}}\right) \cdot \left(\frac{1\ \text{m}^3}{10^3\ \cancel{\text{L}}}\right) = 0{,}1192\ \text{m}^3$$

$$1{,}0 \cdot 10^2\ \text{nm} = \frac{1\ \text{m}}{10^9\ \text{nm}} = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

Si llamamos x al grosor de la capa de aceite; y A, a la superficie que cubre, se tiene:

$$V = A \cdot x \Rightarrow A = \frac{V}{x} = \frac{0{,}1192\ \text{m}^3}{1{,}0 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 1{,}2 \cdot 10^6\ \text{m}^2$$

El dato del grosor de la capa de aceite limita el resultado a dos cifras significativas. La superficie de la marea negra, en km², es:

$$1{,}2 \cdot 10^{-6}\,(\text{m}^2) \cdot \frac{1\,(\text{km}^2)}{10^{-6}\,(\text{m}^2)} = 1{,}2\ \text{km}^2$$

PRECISIÓN Y EXACTITUD. ERRORES EN LAS MEDIDAS

1.42 Indica cuál o cuáles de las afirmaciones siguientes son ciertas:

a) Los errores sistemáticos afectan a la exactitud de una medida.

b) Los errores fortuitos pueden afectar a la exactitud y precisión de una medida.

c) La precisión de una medida es una indicación de su grado de reproducibilidad cuando se realiza varias veces.

d) Cuanto mayor es el número de cifras significativas con que se expresa una cantidad, mayor es su exactitud.

e) Cuando un aparato realiza medidas precisas, para conseguir la medida exacta basta con repetir la medida en numerosas ocasiones.

f) La exactitud en las medidas implica necesariamente precisión.

g) Los errores personales solo se pueden evitar iniciando de nuevo la medida cuando nos hemos percatado de su presencia.

h) Un aparato de medida muy preciso permite utilizar un mayor número de cifras significativas.

a) Cierta. Dado que en cada medida originan un error en la misma dirección, los errores sistemáticos disminuyen la exactitud pero, en general, no afectan a la precisión de la medida.

b) Cierta. Los errores fortuitos afectan a la reproducibilidad y, por tanto, a la precisión de la medida. Por otra parte, si se hace una sola medida, cualquier error hace que el resultado de la medida se aparte del valor real, afectando a la exactitud. (Sin embargo, la repetición de las medidas, con un tratamiento estadístico apropiado, compensa el efecto de los errores fortuitos sobre la exactitud.)

c) Cierta. Por definición, la precisión está relacionada con la reproducibilidad de las medidas.

d) Falsa. Una medida muy reproducible, y realizada con una aparato que tenga una alta resolución, permite expresar el resultado con muchas cifras significativas (alta precisión) pero eso no asegura que el resultado sea más exacto, ya que, debido a un error sistemático de calibración, la medida puede apartarse del valor verdadero, con lo que sería poco exacta.

e) Falsa. La repetición de la medida permite minimizar los errores accidentales y aumentar, así, la precisión. Para conseguir aumentar la precisión es necesario minimizar los errores sistemáticos, calibrando mejor el aparato de medida.

f) Falsa. Si el valor medio de las medidas realizadas está muy próximo al valor verdadero, la exactitud es alta, pero esto no implica que las mediciones sean muy reproducibles con una desviación estándar pequeña, que es un requisito para que la precisión sea grande. Si el resultado de las medidas es $x = \overline{x} \pm \Delta x$, siendo $\overline{x}$ próximo al valor real y Δx grande, la exactitud es alta pero la precisión es baja.

g) Cierta. Los errores personales no se minimizan con la repetición de las medidas y el promedio de los resultados, puesto que se vuelven a cometer en cada repetición. Simplemente, es necesario comenzar de nuevo el experimento cuando se detecta que se ha cometido un error personal, intentando evitarlo en lo sucesivo.

h) Cierta. Cuanto más preciso es el aparato, menor es la incertidumbre en una medida aislada, de modo que esta puede expresarse con mayor número de cifras significativas. Por supuesto, el número de cifras significativas del resultado de una medida que se ha repetido varias veces depende, también, de la reproducibilidad de las mismas, es decir, del valor de desviación estándar, σ.

1.43 Un factor de conversión aproximado para pasar de años a segundos es 1 año = $\pi \cdot 10^7$ s. Determina si esta aproximación está dentro del 0,5 % del valor correcto.

El error absoluto, E_a, se define como la diferencia entre el valor verdadero (o valor aceptado) de la cantidad medida (x) y el valor medido (x_i): $E_a = x - x_i$

Mientras que el error relativo se define como: $E_r\ (\%) = \dfrac{|E_a|}{x} \cdot 100$

Sustituyendo valores, y tomando como año el llamado año sidéreo ($3{,}15581495 \cdot 10^7$ s), los errores resultan:

$$E_a = 3{,}15581495 \cdot 10^7\ \text{s} - \pi \cdot 10^7\ \text{s} = 1{,}422296 \cdot 10^5\ \text{s}$$

$$E_r\ (\%) = \frac{|E_a|}{x} \cdot 100 = \frac{1{,}422296 \cdot 10^5\ \text{s}}{} \cdot 100 = 0{,}45\ \%$$

Por tanto, la cantidad dada, $\pi \cdot 10^7$ s, sí está dentro del 0,5 % del valor correcto.

1.44 Las personas suelen expresar su edad con poca precisión (y las que se quitan años, además, con poca exactitud). Calcula qué error relativo puede llegar a cometer un estudiante al decir que tiene 17 años si está a punto de cumplir 18.

El error absoluto, E_a, se define como la diferencia entre el valor verdadero (o valor aceptado) de la cantidad medida (x) y el valor medido (x_i): $E_a = x - x_i$

Por tanto, el valor máximo del error absoluto es de 1 año. Sustituyendo en la expresión del error relativo, se obtiene:

$$E_r\ (\%) = \frac{|E_a|}{x} \cdot 100 = \frac{1\ \text{año}}{18\ \text{años}} \cdot 100 = 5{,}6\%$$

1.45 Los siguientes resultados no están bien expresados. Indica por qué y exprésalos de forma correcta:

a) $(1{,}867 \pm 0{,}9) \cdot 10^6$ g

b) $(12 \pm 0{,}487)$ s

c) $26{,}98 \pm 0{,}987$ m

a) El valor de la medida tiene que tener la misma precisión que el error. Como la incertidumbre está en la primera cifra decimal, el valor medio debe redondearse a 1,9. El resultado correctamente expresado es $(1{,}9 \pm 0{,}9) \cdot 10^6$ g.

b) En el error solo debe emplearse una cifra distinta de cero. Un error de 0,487 s debe escribirse como 0,5 s. El resultado correctamente expresado es $(12{,}0 \pm 0{,}5)$ s, ya que el valor de la medida tiene que tener la misma precisión que el error.

c) Para redondear la medida es necesario haber redondeado antes el error a una cifra significativa. El error debe escribirse como 1 m. Como la incertidumbre está en las unidades de metro, el valor de la medida debe redondearse a 27. El resultado correctamente expresado es (27 ± 1).

1.46 La masa atómica del titanio es 47,90 u, y la del bromo, 79,90 u. Cuando utilizamos los valores de 48 y 80 u como masas atómicas del Ti y Br, respectivamente, ¿qué error absoluto y qué error relativo cometemos?

El error absoluto, E_a, se define como la diferencia entre el valor verdadero (o valor aceptado) de la cantidad medida (x) y el valor medido (x_i): $E_a = x - x_i$

Mientras que el error relativo se define como: $E_r\ (\%) = \dfrac{|E_a|}{x} \cdot 100$

En el caso del titanio, los errores resultan:

$$E_a = 47{,}90\ (\text{u}) - 48{,}00\ (\text{u}) = -0{,}10\ \text{u} \qquad E_r\ (\%) = \frac{|E_a|}{x} \cdot 100 = \frac{0{,}10\ (\text{u})}{47{,}90\ (\text{u})} \cdot 100 = 0{,}21\%$$

Para el bromo, los errores son:

$$E_a = 79{,}90\ (\text{u}) - 80{,}00\ (\text{u}) = -0{,}10\ \text{u} \qquad E_r\ (\%) = \frac{|E_a|}{x} \cdot 100 = \frac{0{,}10\ (\text{u})}{79{,}90\ (\text{u})} \cdot 100 = 0{,}13\%$$

Como se puede comprobar, aunque el error absoluto es el mismo en ambos casos, el error relativo es mayor en el caso de la masa atómica del titanio.

PRECISIÓN Y EXACTITUD. ERRORES EN LAS MEDIDAS

1.47 En la medida experimental de la longitud de una barra de oro púrpura (80 % Au y 20 % Al) se obtuvo el valor promedio de 25,8261 m, y un error estimado de $\Delta x = 0{,}068$ m. Expresa el resultado con el número correcto de cifras significativas.

Primero se redondea el error estimado, Δx, a una cifra significativa; se obtiene $\Delta x = 0{,}07$ m.

Esto significa que la incertidumbre está en las centésimas de m. Por tanto, el valor promedio debe redondearse a dos cifras decimales, y resulta $\overline{x} = 25{,}83$ m. El resultado de la medida se expresa como $(25{,}83 \pm 0{,}07)$ m.

1.48 Se ha medido la masa de una pieza de oro verde (73 % oro, 27 % plata) con una balanza digital que solo aprecia gramos. La medida se ha repetido cinco veces y el valor obtenido ha sido siempre de 24 g.

a) Expresa el valor de la medida con el error estimado.

b) Razona si la medida ha sido o no precisa.

c) ¿Sirve de algo repetir muchas veces la medida? ¿Por qué?

a) El valor promedio es, obviamente, 24 g:

$$\overline{m} = \frac{24\,(g) + 24\,(g) + 24\,(g) + 24\,(g) + 24\,(g)}{5} = 24 \text{ g}$$

Todos los valores de las desviaciones medias son cero: $m_i - \overline{m} = 0$, por lo que la desviación estándar es $\sigma = 0$. Para los aparatos digitales, la incertidumbre es la mínima magnitud que puede medir el aparato. Por tanto, la incertidumbre debida a la resolución de la balanza es: $\epsilon_{res} = \pm 1$ g. El error estimado de la medida es, pues:

$$\Delta m = \text{máx}(\sigma, \epsilon_{res}) = \text{máx}(0,\ 1 \text{ g}) = 1 \text{ g}$$

El resultado de la medida debe expresarse como:

$$m = 24 \pm 1 \text{ g}$$

b) Aunque las medidas son reproducibles y, por tanto, son muy precisas desde el punto de vista de la dispersión ($\sigma = 0$), la poca resolución del aparato de medida hace que el resultado de la medida sea muy poco preciso.

c) En este caso, la precisión de la medida viene limitada por la resolución del aparato, y no por los errores accidentales. Por ello, no serviría de nada repetir muchas veces la medición. Para aumentar la precisión, tendríamos que utilizar una balanza con mayor resolución (que tenga un valor más pequeño de ϵ_{res}).

1.49 El elemento galio permanece líquido en un rango de temperaturas más amplio que cualquier otra sustancia conocida (2373° C). Utilizando un termómetro que aprecia grados, se realizan seis medidas de su punto de ebullición y resultan los valores siguientes:

2402 °C, 2401 °C, 2406 °C, 2403 °C, 2402 °C, 2403 °C

Expresa el resultado de la medida con el correspondiente error estimado.

Como medida del error accidental, se toma el valor de la desviación estándar σ, que es una medida estadística de la dispersión de las medidas. El valor de la desviación estándar, σ, resulta:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^n (x_i - \overline{x})^2}{}} = \sqrt{\frac{14{,}8334}{5}} = 1{,}7224 \text{ °C}$$

Para los aparatos digitales, la incertidumbre es la mínima magnitud que puede medir el aparato. Por tanto, la incertidumbre debida a la resolución del termómetro es: $\epsilon_{res} = \pm 1$ °C. El error estimado de la medida es, pues:

$$\Delta m = \text{máx}(\sigma, \epsilon_{res}) = \text{máx}(1{,}72 \text{ °C},\ 1 \text{ °C}) = 1{,}7224 \text{ °C}$$

Dado que es solo una estimación, el error se redondea a una sola cifra significativa. Por tanto, $\Delta t = 2$ °C. El valor de Δt indica que la incertidumbre está en las unidades de grado, de modo que el valor promedio (2402,83 °C) se expresa como 2403° C, redondeado a las unidades de grado. El resultado de la medida es:

$$t = 2043 \pm 2 \text{ °C}$$

1.50 En un experimento llevado a cabo a 20,0 °C, un estudiante encontró que la velocidad del sonido en el aire era 329,8 m s^{-1}. Sabiendo que el valor aceptado a dicha temperatura es 343,5 m s^{-1}, calcula:

a) El error absoluto.

b) El error relativo.

El error absoluto, E_a, se define como la diferencia entre el valor verdadero (o valor aceptado) de la cantidad medida (x) y el valor medido (x_i): $E_a = x - x_i$

Mientras que el error relativo se define como: $E_r\ (\%) = \dfrac{|E_a|}{x} \cdot 100$

Sustituyendo valores, los errores resultan:

$$E_a = 343{,}5\ \text{m s}^{-1} - 329{,}8\ \text{m s}^{-1} = 13{,}7\ \text{m s}^{-1} \qquad E_r\ (\%) = \frac{|E_a|}{x} \cdot 100 = \frac{13{,}7\ (\text{m s}^{-1})}{343{,}7\ (\text{m s}^{-1})} \cdot 100 = 3{,}99\,\%$$

1.51 Se quiere calcular el valor de la resistencia R que presenta un circuito. Para ello utilizamos la expresión proporcionada por la ley de Ohm $R = \dfrac{V}{I}$. Se mide la caída de tensión, V, entre sus extremos cuando por el circuito pasa una determinada intensidad de corriente I. El voltímetro usado aprecia décimas de voltio y la medida obtenida es V = 13,5 V; el amperímetro aprecia milésimas de amperio y la medida de la intensidad es I = 0,027 A.

a) Expresa cada medida con su incertidumbre.

b) Calcula el valor de la resistencia y exprésalo con un número adecuado de cifras decimales.

a) La incertidumbre debida a la resolución del voltímetro es: $\epsilon_{res} = \pm 0{,}1$ V. Suponiendo que la precisión viene limitada por la resolución del aparato, la medida de la caída de tensión debe expresarse como V = (13,5 ± 0,1)V.

La incertidumbre debida a la resolución del amperímetro es: $\epsilon_{res} = \pm 0{,}001$ A. Suponiendo que la precisión viene limitada por la resolución del aparato, la medida de la intensidad se expresa como A = (0,027 ± 0,001)A.

b) De acuerdo con la ley de Ohm, el valor más fiable de la resistencia es:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{13{,}5\ (\text{V})}{0{,}027\ (\text{A})} = 500\ \Omega$$

El valor de la intensidad, 0,027 A, limita el resultado del cociente anterior a 2 cifras significativas. El valor de la resistencia debe expresarse como $5{,}0 \cdot 10^2\ \Omega$ (2 c.s.).

1.52 De acuerdo con las reglas significativas, el producto 99,9 · 1,008 debería expresarse con tres cifras significativas como 101. En este caso, sin embargo, sería más apropiado expresar el resultado con 4 c. s. como 100,7. Explica por qué.

El dato 99,9 significa que el último dígito es incierto al menos en ±1. Por tanto, el error relativo de este factor es:

$$E_r\,(99{,}9) = \frac{E_a}{X} = \frac{0{,}1}{99{,}9} \approx 10^{-3}$$

El error relativo del segundo factor es:

$$E_r\,(1{,}008) = \frac{E_a}{X} = \frac{0{,}001}{1{,}008} \approx 10^{-3}$$

De acuerdo con la teoría de propagación de errores, el error relativo de un producto es igual a la suma (en valor absoluto) de los errores relativos de los factores. Por tanto:

$$E_r\,(99{,}9 \cdot 1{,}008) = E_r\,(99{,}9) + E_r\,(1{,}008) \approx 2 \cdot 10^{-3}$$

Una vez calculado el error relativo del producto (99,9 · 1,008), podemos calcular su error absoluto, despejando en la definición de E_r:

$$E_a\,(99{,}9 \cdot 1{,}008) = (99{,}9 \cdot 1{,}008)\,E_r\,(99{,}9 \cdot 1{,}008) \approx 100{,}6992 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \approx 0{,}2$$

Por tanto, el resultado del producto 99,9 · 1,008 (cuyo valor sería 100,6992 si los dos factores fueran números exactos); y suponiendo que el último dígito de ambos es incierto en ±1, debe expresarse como 100,7 ± 0,2. La incertidumbre está, pues, en las décimas, de modo que el resultado del producto debe darse con 4 cifras significativas.

LAS GRÁFICAS Y LOS DATOS EXPERIMENTALES

1.53 **La altura en metros (h) a la que se encuentra un cuerpo que se suelta desde una altura inicial h_0, varía con el tiempo en segundos (t) según la ecuación:**

$$h = h_0 - 4{,}9\ t^2$$

a) ¿Qué gráfica se obtiene al representar h frente a t?

b) ¿Cuánto tarda en llegar al suelo un cuerpo que se suelta desde una altura inicial de 100 m?

a) La gráfica que se obtiene al representar h frente a t es una parábola, ya que la altura es una función cuadrática del tiempo.

b) Cuando el cuerpo llega al suelo, h = 0. Sustituyendo valores en la expresión que relaciona la altura con el tiempo, se obtiene:

$$0 = 100 - 4{,}9\ t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{100}{4{,}9}} = 4{,}5\ \text{s}$$

1.54 **La siguiente tabla muestra los valores del radio medio (R) de las órbitas de los planetas frente al período de revolución (T) en torno al Sol:**

Planeta	R	T
Venus	$1{,}08 \cdot 10^{11}$ m	$1{,}94 \cdot 10^{7}$ s
Tierra	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ m	$3{,}16 \cdot 10^{7}$ s
Marte	$2{,}28 \cdot 10^{11}$ m	$5{,}94 \cdot 10^{7}$ s
Júpiter	$7{,}78 \cdot 10^{11}$ m	$3{,}74 \cdot 10^{8}$ s

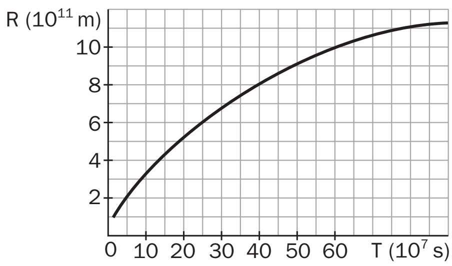
a) Representa gráficamente R frente a T.

b) Comprueba que la gráfica de R frente a $T^{\frac{2}{3}}$ es una recta y calcula su pendiente.

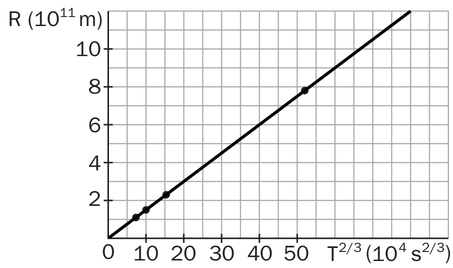
c) Determina el radio medio de la órbita de Saturno, cuyo período es $9{,}30 \cdot 10^8$ s.

d) ¿Qué curva se obtiene al representar R frente a $T^{\frac{1}{3}}$?

a)



b) La relación entre R y T es una relación directa, pero no lineal. Sin embargo, cuando se representan los valores de R^3 frente a la raíz cúbica del cuadrado del período $\left(T^{\frac{2}{3}}\right)$, se obtiene una recta, lo que indica que se trata de una proporción directa: $R \propto T^{\frac{2}{3}}$.



La constante de proporcionalidad es la pendiente de la recta:

$$m = \frac{(y_4 - y_1)}{(x_4 - x_1)} = \frac{7{,}78 \cdot 10^{11}\,(\text{m}) - 1{,}08 \cdot 10^{11}\,(\text{m})}{} = 1{,}15 \cdot 10^6\ \text{m}\,\text{s}^{-\frac{2}{3}}$$

Es decir, $R = 1{,}5 \cdot 10^6 \left(\text{m}\,\text{s}^{-\frac{2}{3}}\right) \cdot T^{\frac{2}{3}}$

c) Sustituyendo el valor del período de Saturno en la expresión anterior, se obtiene:

$$R_{Sat} = 1{,}5 \cdot 10^6 \left(\text{m}\,\text{s}^{-\frac{2}{3}}\right) \left(9{,}30 \cdot 10^8\ \text{s}\right)^{\frac{2}{3}} = 1{,}43 \cdot 10^{12}\ \text{m}$$

d) Dado que $R = mT^{\frac{2}{3}} = m\left(T^{\frac{1}{3}}\right)^2$, vemos que R es una función cuadrática de la variable $T^{\frac{1}{3}}$. Por tanto, al representar R frente a $T^{\frac{1}{3}}$, se obtiene una parábola.

1.55 El producto de la intensidad luminosa (I) procedente de una fuente pequeña por el cuadrado de la distancia a la misma (d) es constante:

$$I\ d^2 = \text{constante}$$

a) ¿Qué gráfica se obtiene al representar I frente a d^2?

b) Si llamamos I_1 a la intensidad a 30 m de distancia de la fuente, ¿a qué distancia la intensidad valdrá 9 I_1?

a) La línea que une los puntos obtenidos al representar los valores que corresponden a dos magnitudes que son inversamente proporcionales, es una hipérbola. Por tanto, la gráfica obtenida al representar I frente a d^2 es una de las ramas de una hipérbola equilátera.

b) Dado que el producto I d^2 es constante, la distancia (d_2) pedida resulta:

$$I_1 \cdot (30\ \text{m})^2 = 9\ I_1\ (d_2)^2 \Rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{I_1 \cdot 900\ \text{m}^2}{9\ I_1}} = 10\ \text{m}$$

1.56 La siguiente tabla muestra los valores de la presión del vapor de agua a distintas temperaturas:

Temperatura (°C)	Presión de vapor (mm Hg)
0,00	4,60
10,0	9,20
20,0	17,50
30,0	31,80
40,0	55,30
60,0	149,00

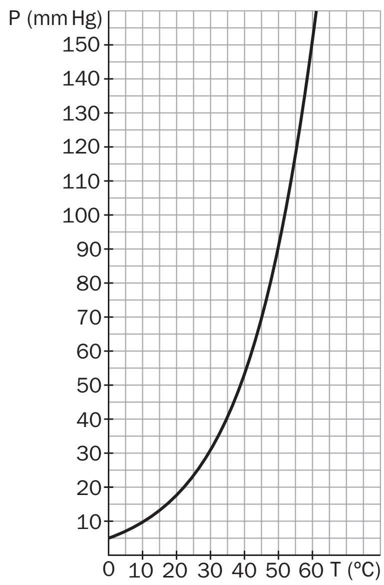
a) Dibuja una gráfica de los datos representando en el eje de abscisas la temperatura, y en el eje de ordenadas, la presión de vapor.

b) ¿Muestra la gráfica una relación directa o inversa?

c) A partir de la gráfica, predice la presión del vapor a 35,0 °C.

d) ¿A qué temperatura la presión del vapor del agua es de 100 mm Hg?

a)



b) La gráfica muestra que hay una relación directa (aunque no lineal) entre la presión de vapor y la temperatura: al aumentar esta, la presión de vapor se hace mayor.

c) Interpolando en la gráfica, se encuentra que para una temperatura de 35 °C, la presión de vapor del agua vale 42 mm Hg (el valor experimental es de 42,175 mm Hg).

d) Igualmente, interpolando en la gráfica dibujada, se encuentra que la presión de vapor del agua es igual a 100 mm Hg cuando la temperatura es de unos 53 °C (el valor experimental es de 51,5 °C).