Tema IV: Dinámica de Sistemas

4.1.- Sistemas de partículas:

Un sistema de partículas es un conjunto de puntos materiales que interaccionan entre sí, mediante fuerzas gravitatorias, electromagnéticas o nucleares.

Si el número de partículas que lo integran es finito, el sistema se llama ***discreto***, mientras que si dicho número es infinito, el sistema recibe el nombre de ***continuo***.

Cuando la distancia mutua entre partículas es invariable, dicho sistema recibe el nombre de ***sólido rígido***, mientras que si esa distancia es variable, el sistema se llama ***deformable***.

Un sistema de partículas es ***abierto*** si sobre él actúan otro u otros cuerpos que se consideran exteriores al mismo. Por el contrario, aquellos sistemas cuyas partículas actúan entre sí, pero no con otros cuerpos exteriores reciben el nombre de sistemas ***cerrados o aislados.***

4.2.- Sistemas Cerrados de dos partículas

Son los sistemas cerrados más sencillos. Si designamos por 1 y 2 las dos partículas que interaccionan entre sí, tenemos que, como $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (principio de acción y reacción):

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Como $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$, podemos escribir la ecuación anterior de la forma siguiente:

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = 0$$

De donde:

$$\boxed{\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = Cte.}$$

En un sistema cerrado integrado por dos partículas el momento lineal total permanece cte.

4.2.1.- Aplicaciones:

a) Retroceso de las armas de fuego:

Al disparar un arma el proyectil sale con una velocidad muy grande, a la vez que el arma retrocede. Sean m y M las masas respectivas del proyectil y del arma y v y V sus velocidades después del disparo. Aplicando el principio de conservación del momento lineal, resulta: $0 = m \cdot v + M \cdot V$

De donde $V = \dfrac{-m}{M} \cdot v$

El arma retrocede en sentido contrario al movimiento del proyectil.

Ejemplo 1: **¿Con qué velocidad retrocede un fusil de masa 5kg. Que dispara un proyectil de 10 g con una velocidad de 200 m/s?.**

Utilizando la ecuación anterior tenemos que: $V = -\dfrac{m}{M} \cdot v = -\dfrac{0{,}01Kg}{5Kg} \cdot 200m/s = -0{,}4m/s$

b) Propulsión a chorro:

Al principio el momento lineal del cohete es nulo; más adelante, como los gases son expulsados hacia abajo, el cohete es impulsado en sentido contrario, y, como el momento lineal total tiene que seguir siendo nulo, se cumplirá:

$$V = -\frac{m}{M} \cdot v$$

Siendo ***M*** y ***V*** la masa y velocidad del cohete y ***m*** y ***v*** la masa y velocidad de los gases expulsados.

Si M es la masa del cohete mas el combustible y m la del combustible desprendido con una velocidad v respecto al cohete, designamos por ***a*** la aceleración que el cohete adquiere en un tiempo t muy pequeño, el momento lineal inicial del cohete es $M \cdot V_o$, y al cabo de un tiempo t será $(M-m)\cdot(V_o+at)$ y el de los gases $m(V_o+at-v)$. Por tanto, de acuerdo con el principio de conservación del momento lineal, tendremos:

$$M \cdot V_o = (M-m)\cdot(V_o+at)+m(V_o+at-v)$$

De donde

$$\boxed{a = \frac{m}{t}\cdot\frac{1}{M}v}$$

Ejemplo 2: Se lanza un cohete de masa inicial m_o de forma que la velocidad del chorro gaseoso expulsado sea cte. Y de valor v con respecto al cohete. Considerando la tierra como sistema de referencia inercial, suponiendo que la trayectoria del cohete sea vertical con un valor de la aceleración de la gravedad cte. Y despreciando la resistencia del aire, calcular la velocidad V del cohete respecto a la tierra al cabo de un tiempo t. (Supóngase cte la cantidad de gases expulsados por unidad de tiempo, dm/dt=Cte.)

Sean m y V la masa y velocidad del cohete en un instante t. Al cabo de un tiempo dt, la masa y la velocidad del cohete habrán variado, y por consiguiente su momento lineal, siendo tal variación d(mV) hacia arriba. El momento lineal de los gases expulsados habrá variado en dm(v-V). Aplicando el principio de conservación del momento lineal, tenemos:

$$d(mV)+dm(v-V)=0$$

Desarrollando esta expresión y simplificando:

$$m\cdot dV + v\cdot dm = 0$$

De donde:

$$dV = -v\cdot\frac{dm}{m}$$

Integrando entre el instante inicial (t = 0,V=0,m=m_o) y t, tenemos:

$$V = \int_{t_o}^{t} -v\cdot\frac{dm}{m} = -v[Lm]_{m_o}^{m} = v\cdot L\frac{m_o}{m}$$

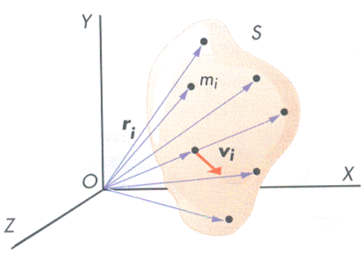
4.3.- Centro de masas:

Cuando un cuerpo está sometido a un movimiento de traslación, cada uno de sus puntos, a medida que va trascurriendo el tiempo, experimenta los mismos desplazamientos que los demás, de tal forma que el movimiento de una partícula se puede considerar como una representación del movimiento de todo el cuerpo.

Sin embargo, en el caso de que el cuerpo, además del movimiento de traslación tenga otro de rotación, el desplazamiento será diferente para los distintos puntos materiales que lo constituyen. Existe, no obstante un punto del cuerpo que se mueve de la misma forma que si el cuerpo en cuestión solo experimentara un movimiento de traslación. Este punto recibe el nombre de centro de masas, y su movimiento es el de traslación del cuerpo considerado.

En un tratamiento de sistemas de masas puntuales el **centro de masas** es el punto donde se supone concentrada toda la masa del sistema.

4.3.1.- Coordenadas del centro de masas:



Supongamos un sistema integrado por n partículas de masas m_1, m_2, …,m_n, cuyas posiciones respecto a un sistema fijo de coordenadas rectangulares vienen dadas por los vectores de posición $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\ldots\ldots,\vec{r}_n$, respectivamente. Consideremos, además que el sistema cumple la ***ley de conservación de la masa***, de forma que $\sum m_i = M$, siendo M la masa total del sistema.

Se llama centro de masas (CM) del sistema a un punto del espacio tal que su vector de posición

$$\vec{r}_o = x_o\hat{i} + y_o\hat{j} + z_o\hat{k}$$

Cumpla la condición:

$$M\cdot\vec{r}_o = \sum m_i\cdot\vec{r}_i$$

De donde:

$$\boxed{\vec{r}_o = \frac{1}{M}\sum m_i\cdot\vec{r}_i}$$

Ecuación vectorial equivalente a las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$x_o = \frac{1}{M}\sum m_i\cdot x_i \qquad y_o = \frac{1}{M}\sum m_i\cdot y_i \qquad z_o = \frac{1}{M}\sum m_i\cdot z_i$$

Si tomamos como origen de coordenadas el centro de masas:

$$\sum m_i\cdot\vec{r}_i = 0 \qquad \sum m_i\cdot x_i = 0 \qquad \sum m_i\cdot y_i = 0 \qquad \sum m_i\cdot z_i = 0$$

En el caso de que el sistema de partículas sea un sólido rígido, lo podemos considerara como una distribución continua de masa, y para hallar la posición de su centrote masas lo hemos de descomponer en infinitos puntos de masa infinitesimal, dm, y de esta forma los sumatorios se transforman en integrales:

$$\vec{r}_o = \frac{1}{M}\int \vec{r}\cdot dm \qquad x_o = \frac{1}{M}\int x\cdot dm \qquad y_o = \frac{1}{M}\int y\cdot dm \qquad z_o = \frac{1}{M}\int z\cdot dm$$

Cuando el origen de coordenadas sea el centro de masas:

$$\int \vec{r}\cdot dm = 0 \qquad \int x\cdot dm = 0 \qquad \int y\cdot dm = 0 \qquad \int z\cdot dm = 0$$

No se debe confundir el centro de masas con el centro de gravedad, ya que éste es el punto de aplicación del peso de sus partículas. No obstante, ambos centros coinciden en el caso de que la aceleración de la gravedad sea la misma para todas las partes del sistema, lo cual sucede cuando el tamaño del cuerpo es reducido.

Si el sólido es homogéneo:

Cúbico	$x_o = \frac{1}{V}\int x\cdot dV\ ;\quad y_o = \frac{1}{V}\int y\cdot dV\ ;\quad z_0 = \frac{1}{V}\int z\cdot dV$
Laminar	$x_o = \frac{1}{S}\int x\cdot dS\ ;\quad y_o = \frac{1}{S}\int y\cdot dS\ ;\quad z_0 = \frac{1}{S}\int z\cdot dS$
Lineal	$x_o = \frac{1}{L}\int x\cdot dL\ ;\quad y_o = \frac{1}{L}\int y\cdot dL\ ;\quad z_0 = \frac{1}{L}\int z\cdot dL$

4.3.2.- Movimiento del centro de masas:

Sea un sistema formado por n partículas, de masas respectivas m_1, m_2,…..,m_n, y cuya masa total M, permanece constante con el tiempo. Para este sistema se cumple:

$$M\cdot\vec{r}_o = \sum m_i\cdot\vec{r}_i$$

Derivando con respecto a t:

$$M\cdot\frac{d\vec{r}_o}{dt} = \sum m_i\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Es decir:

$$M\cdot\vec{V}_{CM} = \sum m_i\cdot\vec{v}_i$$

Donde $\vec{V}_{CM}$ es la velocidad del centro de masas y $\vec{v}_i$ la de la partícula m_i.

Esta ecuación la podemos escribir introduciendo el momento lineal como:

$$\boxed{\vec{P} = \vec{P}_{CM} = \sum \vec{p}_i}$$

El momento lineal total del sistema, que se puede considerar como el momento lineal de su centro de masas, es igual a la suma de los momentos lineales de sus partículas correspondientes.

Derivando de nuevo con respecto a t; tenemos:

$$M \cdot \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \sum m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

Es decir:

$$\boxed{M \cdot \vec{A}_{CM} = \sum m_i \cdot \vec{a}_i}$$

Donde $\vec{A}_{CM}$ es la aceleración del centro de masas y $\vec{a}_i$ la de la partícula m_i. Teniendo en cuanta que $\sum m_i \cdot \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i^E$, se obtiene finalmente:

$$\boxed{\sum \vec{F}_i^E = M \cdot \vec{A}_{CM}}$$

El centro de masas del sistema de partículas se mueve como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en él y sobre él actuasen todas las fuerzas que realmente actúan sobre el sistema.

4.4.- Impulso y momento lineal de un sistema de partículas:

Para un sistema de partículas el ***impulso total*** es el la suma de los impulsos experimentados por cada una de las partículas, a causa de las fuerzas exteriores al sistema:

$$\vec{I} = \sum \vec{I}_i$$

El impulso total comunicado a un sistema es igual a la variación de su momento lineal.

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}}$$

4.4.1.- Principio de Conservación del momento lineal de un sistema.

En un sistema cerrado el momento lineal total permanece constante a lo largo del tiempo.

Ya que en este caso, $\vec{P} = M \cdot \vec{V}_{CM} = Cte.$, resulta que $\vec{V}_{CM} = Cte.$

4.5.- Sistema de referencia del centro de masas:

Ya hemos visto en el apartado anterior que el centro de masas de un sistema cerrado se mueve con velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial. Si el origen de este sistema de referencia lo fijamos en el centro de masas del sistema, es evidente que dicho centro de masas estará en reposo ($\vec{V}_{CM} = 0$). Este es el llamado ***sistema de referencia del centro de masas***. Por consiguiente, como $\vec{P}_{CM} = M \cdot \vec{V}_{CM}$, resulta:

$$\boxed{\vec{P}_{CM} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \cdot \vec{v}_i = 0}$$

El momento lineal total de un sistema cerrado de partículas referido al centro de masas es siempre nulo.

En un sistema cerrado de dos partículas los momentos lineales de ambas respecto a un sistema de referencia del centro de masas son iguales y opuestos, siendo el momento lineal total

4.6.- Momento angular total de un sistema de partículas:

Para un sistema aislado (fuerzas externas nulas), el momento angular permanece constante.

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum (\vec{r}_i \wedge m_i \cdot v_i)$$

Si estamos en el caso de un sólido rígido;

$$\vec{L} = \int (\vec{r} \wedge \vec{v}) dm$$

***Ejemplo 3**: Un sistema está constituido por dos partículas de masas respectivas m_1=3kg y m_2=5kg. En un instante determinado sus vectores de posición y velocidades correspondientes son:*

$$\vec{r}_1 = 4\hat{i} - 2\hat{k} \qquad \vec{v}_1 = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$
$$\vec{r}_2 = -4\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k} \qquad \vec{v}_2 = 2\hat{i} + 2\hat{j}$$

Hallar el momento angular del sistema en ese mismo instante, respecto a su centro de masas.

Como el vector de posición y la velocidad del centro de masas son:

$$\vec{r}_o = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M} = \frac{3kg(4\hat{i} - 2\hat{k}) + 5kg(-4\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k})}{8kg} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{v}_i}{M} = \frac{3kg(2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) + 5kg(2\hat{i} + 2\hat{j})}{8kg} = 2\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}$$

Los vectores de posición y las velocidades de cada una de las partículas con respecto al sistema de referencia del centro de masas son:

$$\vec{r}_1^{\,'} = \vec{r}_1 - \vec{r}_o = 4\hat{i} - 2\hat{k} - (-\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 5\hat{i} - 5\hat{j} - 5\hat{k}$$
$$\vec{r}_2^{\,'} = \vec{r}_2 - \vec{r}_o = -4\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k} - (-\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = -3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\vec{v}_1^{\,'} = \vec{v}_1 - \vec{V}_{CM} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} - (2\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}) = -\frac{5}{2}\hat{j} + \frac{5}{2}\hat{k}$$
$$\vec{v}_2^{\,'} = \vec{v}_2 - \vec{V}_{CM} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - (2\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{3}{2}\hat{k}) = \frac{3}{2}\hat{j} - \frac{3}{2}\hat{k}$$

Calculamos ahora los momentos angulares de las dos partículas respecto al centro de masas del sistema:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1^{\,'} \wedge m_1 \cdot \vec{v}_1^{\,'} = 3kg \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -5 & -5 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = -75\hat{i} - \frac{75}{2}\hat{j} - \frac{75}{2}\hat{k}$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2^{\,'} \wedge m_2 \cdot \vec{v}_2^{\,'} = 5kg \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -45\hat{i} - \frac{45}{2}\hat{j} - \frac{45}{2}\hat{k}$$

El momento angular total, también con respecto al centro de masas, será:

$$\vec{L}' = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2 = -120\hat{i} - 60\hat{j} - 60\hat{k}$$

4.7.- Problemas:

1.- Dos partículas de 2 y 3 kg. De masa están situadas en los puntos de coordenadas (2,1) y (-3,1)m, referidos a cierto observador O. La primera se mueve con una velocidad de 10 m/s a lo largo del eje X, y la segunda, a 8 m/s en una dirección que forma un ángulo de 120° con el eje X.
Calcular:

a) La posición del centro de masas.
b) La posición de cada partícula respecto al centro de masas.
c) La velocidad con que se mueve el centro de masas.
d) La velocidad de cada partícula respecto a centro de masas. Comprueba que la cantidad de movimiento total del sistema con respecto al centro de masas es nula.

2.- Un sistema de partículas está formado por dos masas puntuales m_1=2kg. Y m_2=3kg que se mueven respectivamente según las ecuaciones $\vec{r}_1 = 2t^2\hat{i}$ m y $\vec{r}_2 = 2(t+1)\hat{j}$ m donde t se mide en segundos. Calcular:

a) El momento lineal total del sistema.
b) La fuerza que actúa sobre cada partícula.

3.- Se dispone horizontalmente un proyectil de 8 gr. Y penetra en un bloque de madera de 9 kg. Que puede moverse libremente. La velocidad del sistema formado por el bloque y el proyectil después del impacto es de 30 cm/s. Deducir la velocidad inicial del proyectil.

4.- Las velocidades de dos partículas de masas m_1 y m_2 son respectivamente v_1 y v_2, respecto a un sistema de referencia determinado. Calcular la velocidad del centro de masas respecto a ese mismo sistema y la velocidad de cada una de las partículas respecto al centro de masas.

5.- Un sistema está constituido por dos partículas de masas m_1=3kg. Y m_2=5kg. En un instante determinado sus correspondientes vectores de posición y velocidad son: $\begin{cases} \vec{r}_1 = 4i - 2k \\ \vec{r}_2 = -4i + 8j + 6k \\ \vec{v}_1 = 2i - 2j + 4k \\ \vec{v}_2 = 2i + 2j \end{cases}$.
Calcular el momento angular del sistema en ese mismo instante respecto a su centro de masas.

6.- Un Vagón de masa M se desliza sin rozamiento sobre una vía horizontal. En el momento en que su velocidad es V_o, un hombre de masa m comienza a caminar sobre el vagón, de delante hacia atrás siendo su velocidad respecto al vagón en el momento que lo abandona, V. ¿Cuál será la velocidad del vagón en ese momento?

7.- Un hombre de masa M salta desde una lancha de masa M_1 a la orilla de un río, tomando impulso para conseguir una velocidad c. La lancha retrocede, pero tiene que vencer la resistencia del agua $R = a\cdot v^2$ (siendo a una cte. y v la velocidad variable de la lancha). Determinar la velocidad inicial, v_o, de la lancha en el instante del salto y la que tendrá tras haber transcurrido un tiempo t.

8.- Un cañón de masa M, situado sobre el suelo horizontal, dispara horizontalmente un proyectil de masa m con la velocidad relativa v. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cañón y el suelo es μ, determinar el retroceso X, del cañón.

9.- Un cañón montado sobre ruedas pesa 100 toneladas y dispara proyectiles de 10 kg. a 300 m/s. Determinar el impulso que se ejerce sobre el cañón y su cantidad de movimiento.