1. Dinámica de traslación y de rotación

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 23)

- Las magnitudes vectoriales se diferencian de las escalares por tener una dirección y un sentido. Una magnitud escalar queda totalmente determinada si sabemos su valor numérico y las unidades, mientras que una magnitud vectorial, además de valor numérico y unidades, tiene una dirección y un sentido característicos, que la diferencian de otra magnitud vectorial con las mismas unidades y valor numérico pero con distinta dirección y/o sentido.

  Magnitudes escalares: temperatura, energía, potencia, masa, volumen.

  Magnitudes vectoriales: fuerza, campo eléctrico, campo magnético, peso, velocidad.

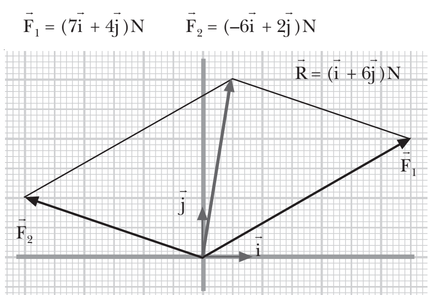
- *a)* $\frac{d(5t)}{dt} = 5$ *b)* $\frac{d(3t^2)}{dt} = 6t$ *c)* $\frac{d(2t^3)}{dt} = 6t^2$

  d) $\frac{d(3t^2 - 4t + 1)}{dt} = 6t - 4$ *e)* $\frac{d(t^3 + 8t^2 - 3)}{dt} = 3t^2 + 16t$

- Los sólidos rígidos pueden tener dos tipos de movimientos: de *traslación* y de *rotación* alrededor de un eje.

  En un movimiento de traslación todas las partículas del sólido efectúan el mismo desplazamiento.

  En un movimiento de rotación todas las partículas del sólido describen trayectorias circulares alrededor de un eje, excepto las situadas sobre el propio eje, que permanecen inmóviles.

- 

- Datos: R = 40 cm = 0,4 m; $\phi = 2\,t + 0{,}5\,t^2$ (SI)

  a) La velocidad angular corresponde a la derivada del ángulo respecto al tiempo:

  $$\omega = \frac{d\phi}{dt} = 2 + t \quad \text{(SI)}$$

  La aceleración angular corresponde a la derivada de la velocidad angular respecto al tiempo:

  $$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

  b) La velocidad lineal se obtiene al multiplicar la velocidad angular por el radio:

  $$v = \omega \cdot R = (2 + t) \cdot 0{,}4 = 0{,}8 + 0{,}4t \quad \text{(SI)}$$

  De la misma manera, obtenemos la aceleración tangencial como el producto del radio por la aceleración angular:

  $$a_t = \alpha \cdot R = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}4\,\text{m} = 0{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

  c) La aceleración normal será:

  $$a_n = \omega^2\,R = (2 + t)^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}4\,t^2 + 1{,}6\,t + 1{,}6 \quad \text{(SI)}$$

  Para t = 5 s, cada una de las componentes de la aceleración será:

  $$a_t = 0{,}4\,\text{m/s}^2$$
  $$a_n = 0{,}4 \cdot 5^2 + 1{,}6 \cdot 5 + 1{,}6 = 19{,}6\,\text{m/s}^2$$

  La aceleración total será la suma vectorial:

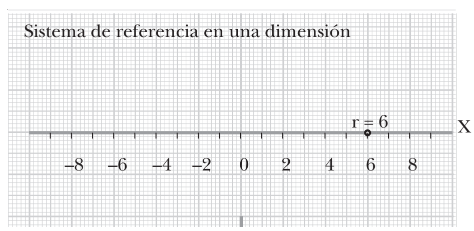
  $$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$
  $$\vec{a} = 0{,}4\,\vec{u}_t + 19{,}6\,\vec{u}_n \quad \text{(SI)}$$

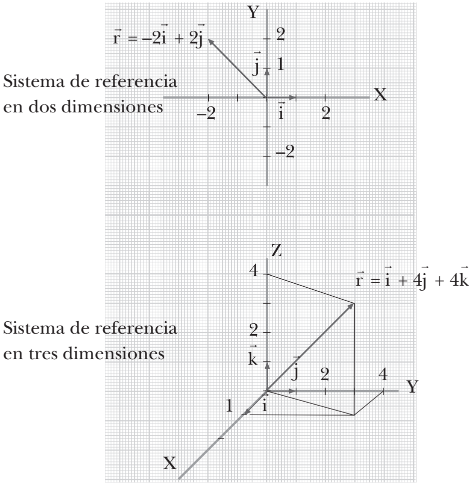
  Su módulo es:

  $$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} =$$
  $$= \sqrt{(0{,}4\,\text{m/s}^2)^2 + (19{,}6\,\text{m/s}^2)^2} = 19{,}6\,\text{m/s}^2$$

1. DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO
(págs. 25, 27, 29, 31 y 33)

1.





2. Datos: $\vec{r}(t) = (4t + 2)\ \vec{i} + (t^2 - 2t)\ \vec{j}$ (SI)

a) Obtendremos los vectores de posición sustituyendo el valor correspondiente del tiempo t en la expresión de $\vec{r}$ (t):

$$\vec{r}(1\text{ s}) = (4 \cdot 1 + 2)\ \vec{i} + (1^2 - 2 \cdot 1)\ \vec{j} = (6\ \vec{i} - \vec{j})\text{ m}$$

$$\vec{r}(3\text{ s}) = (4 \cdot 3 + 2)\ \vec{i} + (3^2 - 2 \cdot 3)\ \vec{j}$$

$$\vec{r}(3\text{ s}) = (14\ \vec{i} + 3\ \vec{j})\text{ m}$$

b) Para encontrar el vector desplazamiento entre los dos instantes restamos los vectores de posición correspondientes:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(3\text{ s}) - \vec{r}(1\text{ s})$$

$$\Delta\vec{r} = (14\ \vec{i} + 3\vec{j})\text{ m} - (6\ \vec{i} - \vec{j})\text{ m} = (8\ \vec{i} + 4\ \vec{j})\text{ m}$$

El módulo del vector desplazamiento será:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(8\text{ m})^2 + (4\text{ m}^2)} = 8{,}9\text{ m}$$

c) Para encontrar la ecuación de la trayectoria, escribimos primero las ecuaciones paramétricas del movimiento:

$$\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$$

Despejando *t* en la primera ecuación e introduciendo su expresión en la segunda ecuación paramétrica, obtendremos la ecuación de la trayectoria:

$$t = \frac{x-2}{4}$$

$$y = \left(\frac{x-2}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{x-2}{4}\right)$$

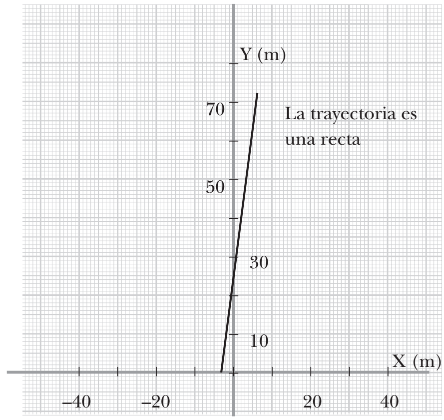
$$y = \frac{(x^2 - 12x + 20)}{16}$$

La trayectoria es una parábola.

3. Datos: $\vec{r}(t) = (t - 3)\ \vec{i} + 8t\ \vec{j}$, en unidades SI

a) Obtenemos la ecuación de la trayectoria a partir de las ecuaciones paramétricas del movimiento:

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = 8t \end{cases} \qquad t = x + 3 \qquad y = 8\ (x + 3) = 8x + 24$$



b) Determinamos los vectores de posición en los instantes t = 2 s y t = 5 s sustituyendo estos valores del tiempo en la expresión de $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(2\text{ s}) = (2 - 3)\ \vec{i} + 8 \cdot 2\ \vec{j} = (-\ \vec{i} + 16\ \vec{j})\text{ m}$$

$$\vec{r}(5\text{ s}) = (5 - 3)\ \vec{i} + 8 \cdot 5\ \vec{j} = (2\ \vec{i} + 40\ \vec{j})\text{ m}$$

c) Calculamos el vector desplazamiento entre los dos instantes restando los vectores de posición correspondientes:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(5\text{ s}) - \vec{r}(2\text{ s})$$

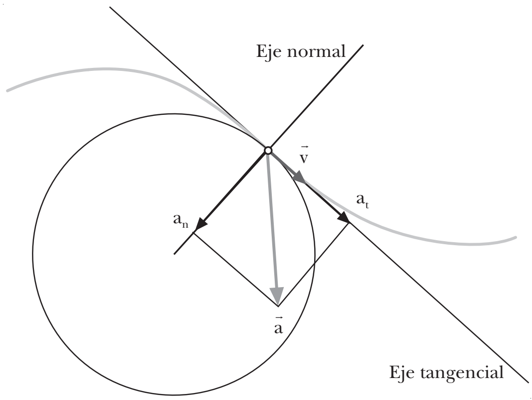
$$\Delta\vec{r} = (2\ \vec{i} + 40\ \vec{j})\text{m} - (-\ \vec{i} + 16\ \vec{j})\text{m} = (3\ \vec{i} + 24\ \vec{j})\text{m}$$

d) La distancia recorrida por el móvil coincidirá con el módulo del vector desplazamiento porque se trata de una trayectoria rectilínea.

$$\Delta s = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(3\text{ m})^2 + (24\text{ m})^2} = 24{,}2\text{ m}$$

4. La celeridad es el módulo del vector velocidad. A diferencia de la velocidad, que es un vector, la celeridad es un escalar. Por lo tanto, la celeridad carece de dirección y sentido.

5. El vector velocidad no se puede descomponer en una componente tangencial y otra componente normal como la aceleración. El eje tangencial está sobre la recta tangente a la trayectoria, mientras que el eje normal se define como el eje perpendicular a la trayectoria en cada punto. La velocidad es siempre tangente a la trayectoria, de forma que su componente normal será siempre nula. En cambio, la componente tangencial coincide con el módulo del vector velocidad.



6. Datos: $\vec{r}(t) = 2t^3\ \vec{i} + t^2\ \vec{j}$, en unidades SI

   a) Obtendremos la velocidad media calculando el cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo. Encontraremos el vector desplazamiento entre los dos instantes restando los vectores de posición correspondientes:

$$\vec{r}(0\ \text{s}) = 2 \cdot 0^3\ \vec{i} + 0^2\ \vec{j} = 0\ \text{m}$$
$$\vec{r}(3\ \text{s}) = 2 \cdot 3^3\ \vec{i} + 3^2\ \vec{j} = (54\ \vec{i} + 9\ \vec{j})\ \text{m}$$
$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}\ (3\ \text{s}) - \vec{r}\ (0\ \text{s})$$
$$\Delta\vec{r} = (54\ \vec{i} + 9\ \vec{j})\ \text{m} - 0\ \text{m} = (54\ \vec{i} + 9\ \vec{j})\ \text{m}$$

   Aplicando la definición de velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\vec{t}} = \frac{\vec{r}(3\ \text{s}) - \vec{r}(0\ \text{s})}{3\ \text{s} - 0\ \text{s}} = (18\ \vec{i} + 3\ \vec{j})\ \text{(SI)}$$

   b) Obtenemos la velocidad instantánea derivando el vector de posición:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\ \vec{r}\ (t)}{dt} = (6\ t^2\ \vec{i} + 2t\ \vec{j}\ )\ \text{(SI)}$$

   c) Hallamos la aceleración media calculando el cociente entre la diferencia de los vectores velocidad, en los dos instantes, y el intervalo de tiempo. Los vectores velocidad en los instantes t = 3 s y t = 0 s se obtienen sustituyendo el tiempo t correspondiente en la expresión de la velocidad instantánea obtenida en el apartado anterior:

$$\vec{v}(0\ \text{s}) = 6 \cdot 0^2\ \vec{i} + 2 \cdot 0\ \vec{j} = 0\ \text{m/s}$$
$$\vec{v}(3\ \text{s}) = 6 \cdot 3^2\ \vec{i} + 2 \cdot 3\ \vec{j} = (54\ \vec{i} + 6\ \vec{j})\ \text{m/s}$$

   Aplicando la definición de aceleración media:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta\vec{t}} = \frac{\vec{v}(3\ \text{s}) - \vec{v}(0\ \text{s})}{3\ \text{s} - 0\ \text{s}} = (18\ \vec{i} + 2\ \vec{j})\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

   d) La aceleración instantánea se obtiene derivando el vector velocidad instantánea:

$$\vec{a}\ (t) = \frac{d\vec{v}\ (t)}{dt} = (12\ t\ \vec{i} + 2\ \vec{j})\ \text{(SI)}$$

   e) Hallamos la velocidad y la aceleración en el instante t = 1 s sustituyendo este valor del tiempo en las expresiones de la velocidad y la aceleración instantáneas:

$$\vec{v}(1\ \text{s}) = 6 \cdot 1^2\ \vec{i} + 2 \cdot 1\ \vec{j} = (6\ \vec{i} + 2\ \vec{j})\ \text{m/s}$$
$$\vec{a}(1\ \text{s}) = 12 \cdot 1\ \vec{i} + 2\ \vec{j} = (12\ \vec{i} + 2\ \vec{j})\ \text{m/s}^2$$

7. Datos: $\vec{v}(t) = 3t\ \vec{i} + t\ \vec{j}$, en unidades SI

   a) La aceleración instantánea se obtiene derivando el vector velocidad instantánea:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (3\ \vec{i} + \vec{j})\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

   El vector aceleración instantánea no depende del tiempo, es constante. Por tanto, en el instante t = 2 s la aceleración será la misma que en cualquier otro instante:

$$\vec{a}(2\ \text{s}) = (3\ \vec{i} + \vec{j})\ \text{m/s}^2$$

   Su módulo también será constante:

$$\left|\vec{a}\ (2\ \text{s})\right| = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{(3\ \text{m/s}^2)^2 + (1\ \text{m/s}^2)^2} = \sqrt{10}\ \text{m/s}^2$$

   b) La componente tangencial de la aceleración es la derivada del módulo de la velocidad. El módulo de la velocidad en un instante t será:

$$\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{(3\ t)^2 + t^2} = \sqrt{10}\ t$$

   y su derivada:

$$\vec{a}\ (t) = \frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt} = \sqrt{10}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

   La aceleración tangencial no depende del tiempo en este caso. Por tanto, en t = 2 s su valor será $\sqrt{10}\ \text{m/s}^2$.

   Además, coincide con el módulo de la aceleración total, de donde se deduce que la componente normal es nula.

   Otra forma de ver que la componente normal es cero consiste en obtener la ecuación de la posición integrando la ecuación de la velocidad:

$$\vec{r}\ (t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\ dt$$
$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t (3t\ \vec{i} + t\ \vec{j})\ dt = \frac{3}{2}t^2\ \vec{i} + \frac{1}{2}t^2\ \vec{j}$$

   Entonces se puede obtener la ecuación de la trayectoria:

$$\begin{cases} x - x_0 = \dfrac{3}{2}t^2 \\ y - y_0 = \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases} \qquad t^2 = \frac{2}{3}\left(x - x_0\right); \qquad y - y_0 = \frac{x - x_0}{3}$$

   La trayectoria es una recta. Por lo tanto, la aceleración normal será cero.

8. Datos: $\vec{a} = 3t\ \vec{i}$ (SI); $\vec{v}_0 = 0{,}5\ \vec{i}\ \text{m/s}$; $\vec{r}_0 = 4\ \vec{i}\ \text{m}$

La ecuación de la velocidad se obtiene integrando la ecuación de la aceleración. En este caso, sólo hay una componente:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

$$\vec{v}(t) = 0{,}5\vec{i} + \int_0^t 3t\,\vec{i}\,dt = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^2\right)\vec{i} \text{ (SI)}$$

La ecuación de la posición se obtiene integrando la ecuación de la velocidad anterior:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t v\,(t)\,dt = 4\vec{i} + \int_0^t \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^2\right)\vec{i}\,dt$$

$$\vec{r}(t) = \left(4 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^3\right)\vec{i} \text{ (SI)}$$

Las ecuaciones de la velocidad y de la posición en función del tiempo son:

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}\right)\vec{i} \text{ (SI)}$$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t + 4\right)\vec{i} \text{ (SI)}$$

9. Datos: $a = 3$ m/s^2; $t_1 = 25$ s; $t_2 - t_1 = 1$ min $= 60$ s;

   $x_0 = 0$ m; $v_0 = 0$ m/s; $t_0 = 0$ s

   Primera etapa: MRUA. Calculamos la posición y la velocidad al final de esta etapa:

$$x_1 = x_0 + v_0\,(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a\,(t_1 - t_0)^2$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\,3\,\frac{m}{s^2}\,(25\text{ s})^2 = 937{,}5\text{ m}$$

$$v_1 = v_0 + a\,(t_1 - t_0) = 3\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 25\text{ s} = 75\text{ m/s}$$

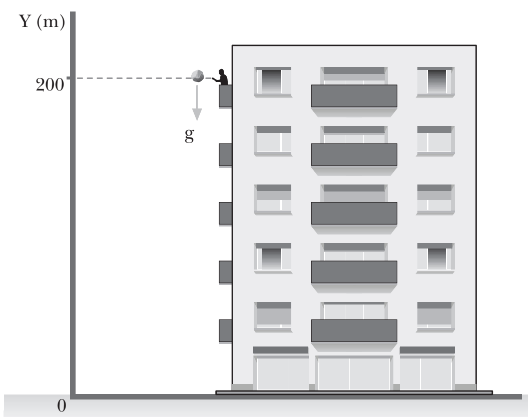
   Segunda etapa: MRU. Calculamos la posición final de la moto, que coincide con la distancia total recorrida, ya que la posición inicial era $x_0 = 0$:

$$x_2 = x_1 + v_1\,(t_2 - t_1) = 937{,}5\text{ m} + 75\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot(60\text{ s})$$

$$x_2 = 5\,437{,}5\text{ m}$$

   La distancia total recorrida es de 5 437,5 m.

10. Datos:



Las ecuaciones del movimiento de la bola son:

$$y = y_0 + v_0\,(t - t_0) - \frac{1}{2}g\,(t - t_0)^2$$

$$y = 200\text{ m} - \frac{1}{2}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

$$v = v_0 - g\,(t - t_0);\ v = -\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t$$

a) La bola llegará al suelo cuando la altura y sea cero. Encontraremos el tiempo de vuelo de la bola imponiendo esta condición en su ecuación de la posición:

$$0 = 200\text{ m} - \frac{1}{2}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

La solución positiva de esta ecuación da un tiempo de $t = 6{,}4$ s.

b) La velocidad con la que llega la bola al suelo se obtiene sustituyendo el tiempo de vuelo que acabamos de encontrar en la ecuación de la velocidad:

$$v(6{,}4\text{ s}) = -\,9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 6{,}4\text{ s} = -\,62{,}7\text{ m/s}$$

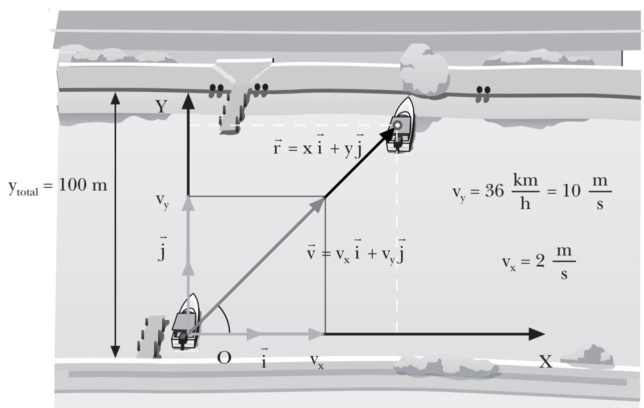
La bola llega al suelo con una velocidad de 62,7 m/s. El signo negativo indica que la bola se mueve hacia abajo.

c) A los dos segundos de dejar caer la bola, su velocidad viene dada por la misma ecuación con $t = 2$ s:

$$v(2\text{ s}) = -\,9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 2\text{ s} = -\,19{,}6\text{ m/s}$$

La bola se mueve con una velocidad de 19,6 m/s dirigida hacia abajo.

11. Datos:



Tomamos $x = 0$ e $y = 0$ en el punto de partida de la barca. Teniendo en cuenta que:

$$36\,\frac{km}{h} = 36\,\frac{km}{h}\cdot\frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}}\cdot\frac{1\,000\text{ m}}{1\text{ km}} = 10\,\frac{m}{s}$$

las ecuaciones de movimiento de la barca serán:

$$x = x_0 + v_x\,(t - t_0) = v_x\,t = 2\,\frac{m}{s}\,t$$

$$y = y_0 + v_y\,(t - t_0) = v_y\,t = 10\ \frac{m}{s}\ t$$

a) La barca habrá cruzado el río cuando llegue a la otra orilla. En esa posición, $y = y_{total} = 100$ m. Hallamos el tiempo empleado en cruzar el río imponiendo esta condición en la ecuación de y:

$$y = v_y\,t;\ t = \frac{y}{v_y} = \frac{100\ m}{10\ m/s} = 10\ s$$

b) La componente y del desplazamiento es la anchura del río, $y = 100$ m. Calculamos la componente x:

$$x = v_x\,t = 2\ m{\cdot}s^{-1} \cdot 10\ s = 20\ m$$

Por tanto, la distancia recorrida será:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(20\ m)^2 + (100\ m)^2} = 102{,}0\ m$$

c) Para determinar la ecuación de la trayectoria, despejamos el tiempo de la coordenada x y lo sustituimos en la ecuación de la coordenada y:

$$\begin{cases} x = 2\,t \\ y = 10\,t \end{cases} \qquad t = \frac{x}{2}; \qquad y = 10\ \frac{x}{2} = 5x$$

12. Datos: $y_0 = 200$ m; $v_0 = 50$ m/s; $\alpha = 45°$

Calculamos las componentes de la velocidad inicial:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 50\ \frac{m}{s}\cos 45° = 35{,}4\ \frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = v_0\ \mathrm{sen}\ \alpha = 50\ \frac{m}{s}\ \mathrm{sen}\ 45° = 35{,}4\ \frac{m}{s}$$

Las ecuaciones del movimiento del proyectil, escritas por componentes, serán:

$$x = x_0 + v_{0x}\,(t) = 35{,}4\ \frac{m}{s}\ t;\ y = y_0 + v_{0y}\,(t) - \frac{1}{2}\,g\,(t)^2$$

$$x = 200\ m + 35{,}4\ \frac{m}{s}\ t - \frac{1}{2}\,9{,}8\ \frac{m}{s^2}\ t^2$$

$$v_x = v_{0x} = 35{,}4\ m{\cdot}s^{-1}$$

$$v_y = v_{0y} - g\,(t);\ v_y = 35{,}4\ \frac{m}{s} - 9{,}8\ \frac{m}{s}\ t$$

a) El proyectil alcanza la altura máxima en el punto donde $v_y = 0$. Buscamos el instante en que esto se produce:

$$v_y = v_{0y} - g\,t$$

$$t = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{35{,}4\ m/s - 0\ m/s}{9{,}8\ m/s^2} = 3{,}6\ s$$

La altura en este instante es:

$$y = y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

$$y = 200\ m + 35{,}4\ \frac{m}{s} \cdot 3{,}6\ s - \frac{1}{2}\,9{,}8\ \frac{m}{s^2} \cdot (3{,}6\ s)^2$$

$$y = 263{,}8\ m$$

b) La velocidad en este punto sólo tiene componente horizontal, v_x, porque $v_y = 0$. Entonces:

$$v = v_x = 35{,}4\ m/s$$

c) Para hallar el alcance necesitamos determinar el instante en que el proyectil llega al suelo. Lo obtenemos imponiendo $y = 0$:

$$0 = y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

$$0 = 200\ m + 35{,}4\ \frac{m}{s}\ t - \frac{1}{2}\,9{,}8\ \frac{m}{s^2}\ t^2$$

$$4{,}9\ t^2 - 35{,}4\ t - 200 = 0$$

La solución positiva de esta ecuación de segundo grado es $t = 10{,}9$ s.

Sustituyendo este tiempo en la ecuación de la coordenada x, hallamos el alcance:

$$x = v_{0x}\,t = 35{,}4\ m{\cdot}s^{-1} \cdot 10{,}9\ s = 387{,}2\ m$$

13. Datos: $R = 30$ cm $= 0{,}3$ m; $\omega = 10$ rpm ;

$t = 2$ min $= 120$ s

a) Expresamos la velocidad angular de 10 rpm en rad/s:

$$10\ rpm = 10\,\frac{rev}{min} \cdot \frac{2\,\pi\ rad}{1\ rev} \cdot \frac{1\ min}{60\ s} = \frac{\pi}{3}\ \frac{rad}{s}$$

b) Los puntos de la periferia se encuentran a una distancia del centro igual al radio de la rueda. Su velocidad lineal será:

$$v = \omega\,R = \frac{1}{3}\,\pi\ \frac{rad}{s} \cdot 0{,}3\ m = 0{,}1\ \pi\ \frac{m}{s} = 0{,}31\ \frac{m}{s}$$

Los puntos situados a 10 cm del eje giran con un radio $R = 10$ cm $= 0{,}1$ m. Por tanto:

$$v = \omega\,R = \frac{1}{3}\,\pi\ \frac{rad}{s} \cdot 0{,}1\ m = 0{,}03\ \pi\ \frac{m}{s} = 0{,}10\ \frac{m}{s}$$

c) Calculamos el ángulo descrito en 2 min:

$$\varphi = \omega\,t = \frac{1}{3}\,\pi\ \frac{rad}{s} \cdot 120\ s = 40\ \pi\ rad$$

Pasamos este ángulo de radianes a revoluciones (o vueltas):

$$40\ \pi\ rad\ \frac{1\ vuelta}{2\pi\ rad} = 20\ vueltas$$

d) La componente tangencial de la aceleración es nula, ya que se trata de un MCU.

La aceleración normal de los puntos de la periferia es:

$$a_n = \omega^2\,R = \left(\frac{\pi}{3}\ \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 0{,}3\ m = 0{,}33\ \frac{m}{s^2}$$

14. Datos: R = 25 cm = 0,25 m; ω_o = 0,5 rev/s; t = 40 s

a) Expresamos la velocidad angular inicial en rad/s:

$$\omega_0 = 0{,}5\ \frac{\text{rev}}{\text{s}} = 0{,}5\ \frac{\text{rev}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{rev}} = \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Calculamos la aceleración angular a partir de la ecuación de la velocidad angular y sabiendo que será cero en t = 40 s:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\ t\ ;\ 0\ \pi\ \text{rad/s} + \alpha \cdot 40\ \text{s}$$

$$\alpha = -\frac{\pi\ \text{rad/s}}{40\,\text{s}} = -\frac{\pi}{40}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Utilizamos la ecuación del movimiento para determinar el ángulo girado en 40 s:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_o\ (t - t_0) + \frac{1}{2}\ \alpha\ (t - t_0)^2$$

$$\varphi = \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 40\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{40} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (40\ \text{s})^2 = 20\ \pi\ \text{rad}$$

Pasamos este ángulo de radianes a revoluciones (o vueltas):

$$20\ \pi\ \text{rad}\ \frac{1\ \text{vuelta}}{2\ \pi\ \text{rad}} = 10\ \text{vueltas}$$

c) Cuando la rueda comienza a frenar, la velocidad angular es la inicial, ω_0. La componente normal de la aceleración para un punto de la periferia será:

$$a_n = \omega_0^2\ R = (\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2 \cdot 0{,}25\ \text{m} = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

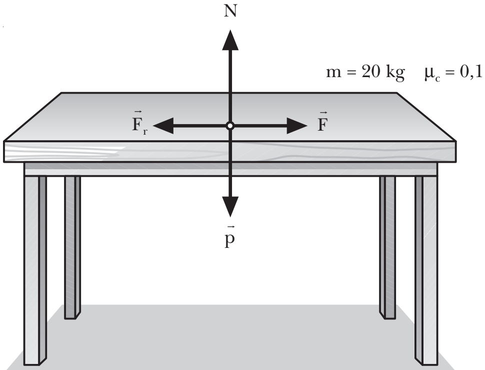
La aceleración tangencial será:

$$a_t = \alpha\ R = -\frac{\pi}{40}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}25\ \text{m} = -\ 0{,}02\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2. CAUSAS DEL MOVIMIENTO (págs. 35, 37 y 39)

15. Si dejamos caer una piedra desde cierta altura, la Tierra ejerce sobre ella una fuerza: la fuerza de la gravedad. Como esta fuerza no se ve compensada, la fuerza resultante sobre la piedra no es nula. Como resultado, y tal como indica la segunda ley de Newton, la piedra adquiere una aceleración proporcional a la fuerza que actúa sobre ella.

16. Datos:



Para que se mueva con velocidad constante, es necesario que la fuerza resultante sea cero:

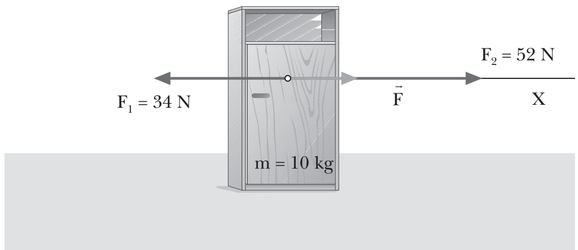
$$R = F - F_r = 0 \Rightarrow F = F_r$$

La fuerza que debemos aplicar será igual a la fuerza de rozamiento:

$$F = F_r = \mu_c\ N = \mu_c\ p = \mu_c\ m\ g$$

$$F = 0{,}1 \cdot 20\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 19{,}6\ \text{N}$$

17. Datos:



Calculamos la fuerza resultante:

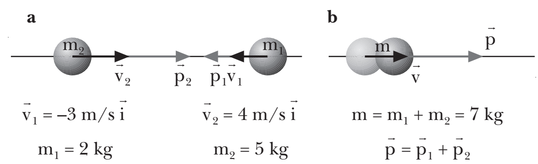
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\ 34\ \text{N}\ \vec{i} + 52\ \text{N}\ \vec{i}$$

$$F = 52\ \text{N} - 34\ \text{N} = 18\ \text{N}$$

Hallamos la aceleración que adquiere el cuerpo con esta fuerza resultante:

$$F = m\ a \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{18\ \text{N}}{10\ \text{kg}} = 1{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

18. Datos:



La fuerza resultante sobre el sistema es nula. Por tanto, se conservará la cantidad de movimiento. Calculamos primero la cantidad de movimiento inicial del sistema:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\vec{p}_1 = m_1\ \vec{v}_1 = 2\ \text{kg} \cdot (-3)\ \text{m/s}\ \vec{i} = -\ 6\ \text{kg·m/s}\ \vec{i}$$

$$\vec{p}_2 = m_2\ \vec{v}_2 = 5\ \text{kg} \cdot 4\ \text{m/s}\ \vec{i} = 20\ \text{kg·m/s}\ \vec{i}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = -\ 6\ \text{kg·m/s}\ \vec{i} + 20\ \text{kg·m/s}\ \vec{i} = 14\ \text{kg·m/s}\ \vec{i}$$

Si cuando las dos bolas chocan quedan unidas, su masa final será:

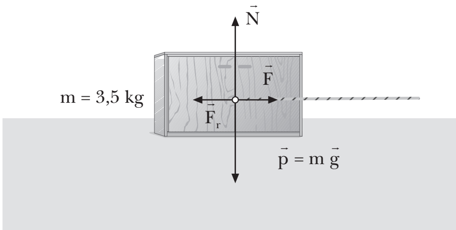
$$m = m_1 + m_2 = 2\ \text{kg} + 5\ \text{kg} = 7\ \text{kg}$$

Por tanto, la velocidad del sistema después del choque será:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{14\ \text{kg·m/s}\ \vec{i}}{7\ \text{kg}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ \vec{i}$$

19. Datos: m = 3,5 kg; T = 6 N

a)



b) Para que la velocidad sea constante, es necesario que la fuerza resultante sea nula:

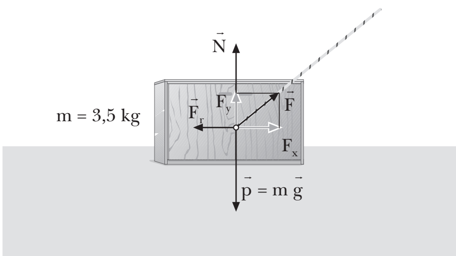
$$R = F - F_r = 0 \Rightarrow F_r = F = 6\text{ N}$$

A partir de la fuerza de rozamiento, calculamos el coeficiente cinético de rozamiento:

$$F_r = \mu_c\, N = \mu_c\, p = \mu_c\, m\, g$$

$$\mu_c = \frac{F_r}{m\,g} = \frac{6\text{ N}}{3{,}5\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m·s}^{2}} = 0{,}17$$

c)



Si la cuerda se inclina 45°, la fuerza se podrá descomponer en dos componentes y aparecerá una nueva componente vertical que antes no existía:

— Componente horizontal: $F_x = F \cos 45^{o} = 4{,}2$ N

— Componente vertical: $F_y = F \text{ sen } 45^{o} = 4{,}4$ N

Como la componente vertical es menor que el peso, el bloque sólo puede moverse horizontalmente:

$$p = m\,g = 3{,}5\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 = 34{,}3\text{ N} > F_y = 4{,}2\text{ N}$$

Pero a causa de esta nueva componente vertical, la fuerza normal es menor que en el caso anterior. Teniendo en cuenta que el bloque no se mueve verticalmente y que, por tanto, la resultante en el eje vertical es cero:

$$R_y = N + F_y - p = 0 \Rightarrow N = p - F_y = 30{,}1\text{ N}$$

Entonces, la fuerza de rozamiento será más pequeña que con la cuerda horizontal:

$$F_r = \mu_c\, N = 0{,}17 \cdot 30{,}1\text{ N} = 5{,}1\text{ N} < 6\text{ N}$$

Pero ahora la componente horizontal de la fuerza ejercida por la cuerda, F_x, también es menor que en los apartados anteriores. Además, F_x es más pequeña que la fuerza de rozamiento:

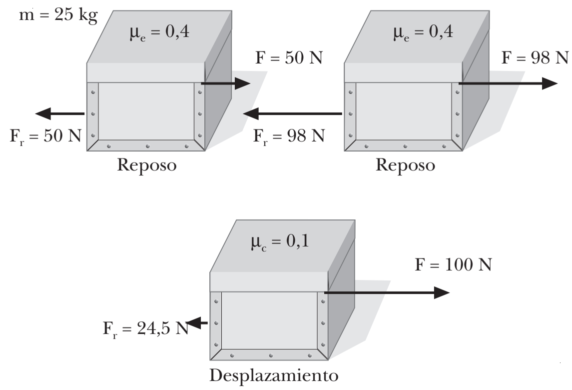
$$F_x = 4{,}2\text{ N} < 5{,}1\text{ N} = F_r$$

Por lo tanto, si el bloque parte del reposo, no se moverá. Si, en cambio, inclinamos la cuerda cuando el bloque ya se estaba moviendo, éste se moverá con movimiento rectilíneo desacelerado, con aceleración:

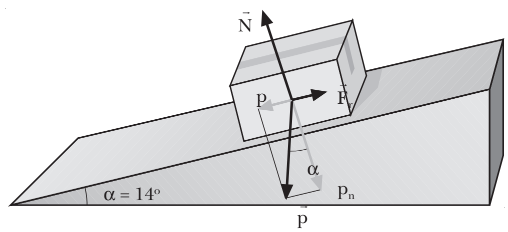
$$a = \frac{R}{m} = \frac{F_x - F_r}{m} = \frac{4{,}2\text{ N} - 5{,}1\text{ N}}{3{,}5\text{ kg}} = -0{,}26\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

20. No, no siempre es cierto. El valor μ_e N indica la fuerza de rozamiento estática máxima entre un cuerpo y una superficie. Superado este valor, el cuerpo comienza a deslizarse, pero mientras el cuerpo está en reposo la fuerza de rozamiento no tiene por qué alcanzar este valor máximo. En general, su módulo tiene exactamente el mismo valor que la compomente tangencial de la fuerza aplicada.

Ejemplo:



21. Si la caja baja a velocidad constante, la aceleración es nula y sabemos que la fuerza resultante es cero.



Eje tangencial: $p_t - F_r = m\,a = 0 \Rightarrow p_t = F_r$
$m\,g \text{ sen } \alpha = \mu_c\, N$

Eje normal: $N - p_n = 0 \Rightarrow N = p_n = p \cos \alpha$

$N = m\,g \cos \alpha$

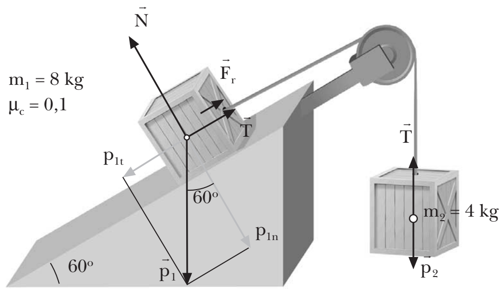
Sustituyendo esta expresión de N en la ecuación del eje tangencial:

$$m\,g \text{ sen } \alpha = \mu_c\, m\,g \cos \alpha$$

$$\mu_c = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha = 0{,}25$$

22. Supondremos que el sistema se mueve hacia la izquierda. Es decir, que el cuerpo 1 desciende por el plano, mientras el cuerpo 2 asciende. Si la aceleración resultante fuera negativa, deberíamos repetir el problema cambiando el sentido del movimiento.

Representamos todas las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo y calculamos la aceleración:



Cuerpo 1: $p_{1t} - F_r - T = m_1\, a$

Cuerpo 2: $T - p_2 = m_2\, a$

Sumando las dos ecuaciones:

$$p_{1t} - F_r - p_2 = (m_1 + m_2)\, a$$

$$a = \frac{p_{1t} - F_r - p_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\, g \operatorname{sen} \alpha - \mu_c\, m_1\, g \cos\alpha - m_2\, g}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{8 \cdot 9{,}8 \cdot \operatorname{sen} 60° - 0{,}1 \cdot 8 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 60° - 4 \cdot 9{,}8}{8 + 4}$$

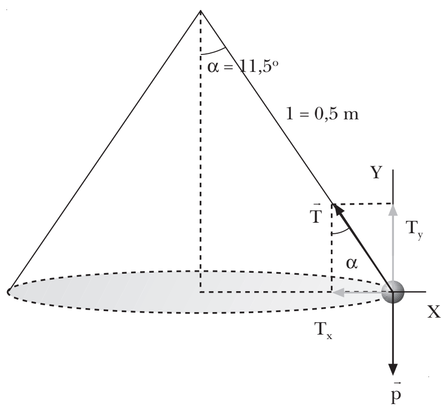
$$a = 2{,}1\ \text{m/s}^2$$

Despejamos la tensión de la ecuación del cuerpo 2:

$$T = m_2 a + p_2 = m_2\, a + m_2\, g = m_2\, (a + g)$$

$$T = 4\ \text{kg} \cdot (2{,}1\ \text{m/s}^2 + 9{,}8\ \text{m/s}^2) = 47{,}6\ \text{N}$$

23. Datos:



Aplicamos la segunda ley de Newton, teniendo en cuenta que la fuerza resultante en la dirección radial tiene que ser la fuerza centrípeta:

Eje X: $T_x = F_c\,;\ \ T \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{m\, v^2}{R}$

Eje Y: $T_y = p\,;\ \ T \cos \alpha = m\, g$

Despejamos la tensión de la segunda ecuación:

$$T = \frac{m\, g}{\cos \alpha}$$

y la sustituimos en la primera:

$$\frac{m\, g}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha = \frac{m\, v^2}{R}$$

$$m\, g\, \operatorname{tg} \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

Despejamos la velocidad:

$$v = \sqrt{g\, R\, \operatorname{tg} \alpha}$$

Teniendo en cuenta que $R = 1 \operatorname{sen} \alpha$:

$$v = \sqrt{g\, R\, \operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{g\, 1 \operatorname{sen} \alpha\, \operatorname{tg} \alpha}$$

Sustituyendo los valores del problema,

$$v = \sqrt{9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}5\ \text{m} \cdot \operatorname{sen} 11{,}5° \cdot \operatorname{tg} 11{,}5°} = 0{,}45\ \text{m/s}$$

24. Una bola que gira verticalmente atada a una cuerda no cae en el punto más alto porque la fuerza del peso se emplea en cambiar la dirección del movimiento de la bola y no en hacerla caer al suelo. Si no actuara sobre la bola ninguna fuerza, ésta no seguiría una trayectoria circular, sino recta. La fuerza del peso de la bola contribuye, junto con la tensión de la cuerda, a aportar la fuerza centrípeta necesaria para que la bola lleve a cabo un movimiento circular.

25. Datos: m = 150 g = 0,15 kg; R = 80 cm = 0,8 m; T_{max} = 10 N

a) La cuerda se romperá en el punto inferior de la trayectoria. En este punto la fuerza centrípeta es igual a la tensión de la cuerda menos el peso de la piedra.

$$T_{max} - p = \frac{m\, v^2}{R};\ \ v = \sqrt{\frac{R\left(T_{max} - m\, g\right)}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{0{,}8\ \text{m}\left(10\ \text{N} - 0{,}15\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2\right)}{0{,}15\ \text{kg}}} = 6{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La cuerda se romperá donde la tensión es máxima. Esto sucede en el punto inferior de la trayectoria, donde la fuerza del peso actúa en sentido contrario a la tensión.

3. MOVIMIENTO DE ROTACIÓN (págs. 40, 42, 44 y 46)

26. Un cuerpo sometido a una fuerza resultante nula y a un momento no nulo tendrá un movimiento de rotación debido al momento. Si inicialmente estaba en reposo, no se trasladará. Si, en cambio, inicialmente estaba en traslación, seguirá moviéndose con velocidad constante y en trayectoria rectilínea.

Si está sometido a una fuerza resultante no nula, tendrá un movimiento de traslación acelerado. Además, si el momento no es nulo, tendrá un movimiento de rotación.

27. Datos: $\vec{F} = (3, 5, 1)$ N; $\vec{r} = (1, 2, 1)$ m

Calculamos el momento de la fuerza como el producto vectorial de $\vec{r}$ con la fuerza $\vec{F}$:

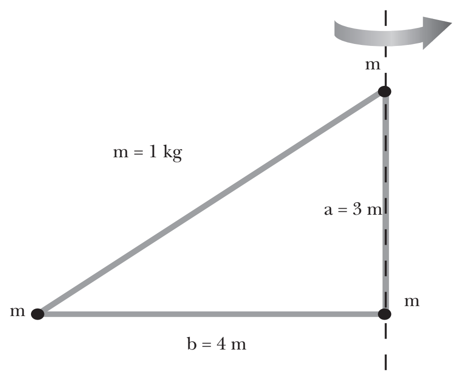
$$\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F} = (1,2,1)\,\text{m x}\,(3,5,1)\,\text{N}$$

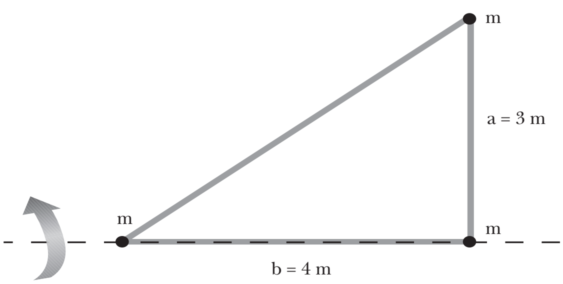
$$\vec{M} = \left[\left(\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}\right) \text{x} \left(3\,\vec{i} + 5\,\vec{j} + \vec{k}\right)\right] \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{M} = \left(-3\vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}\right) \text{N} \cdot \text{m}$$

28. El momento de inercia I_i de una partícula, definido como $I_i = m_i\, r_i^2$, depende del eje respecto al cual lo calculemos, ya que variará la distancia r_i de la partícula al eje. Del mismo modo, el momento de inercia de un sistema discreto de partículas depende del eje que escojamos, pues cambiarán las distancias r_i de todas las partículas.

29. Datos: $m_1 = m_2 = m_3 = m = 1$ kg; a = 3 m; b = 4 m





Calculamos el momento de inercia a partir de su definición. Teniendo en cuenta que dos de las masas están sobre el eje de rotación, sólo contribuirá al momento de inercia la tercera masa.

— Si gira en torno al primer cateto (a): $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = b = 4$ m

$$I_a = \sum_i m_i\, r_i^2 = mb^2 = 1\,\text{kg} \cdot (4\,\text{m})^2 = 16\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

— Si gira en torno al segundo cateto (b):

$r_1 = a = 3$ m, $r_2 = r_3 = 0$

$$I_b = \sum_i m_i\, r_i^2 = ma^2 = 1\,\text{kg} \cdot (3\,\text{m})^2 = 9\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

30. Datos: m = 1kg; R = 0,25 m

Cilindro. Utilizaremos la expresión del momento de inercia para un cilindro macizo que aparece en la página 53 del libro del alumno:

$$I = \frac{1}{2} m\, R^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,\text{kg} \cdot (0{,}25\,\text{m})^2 = 0{,}031\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Esfera. Aplicamos la fórmula correspondiente a la esfera maciza que aparece en la página 53 del libro del alumno.

$$I = \frac{2}{5}\, m\, R^2 = \frac{2}{5} \cdot 1\,\text{kg} \cdot (0{,}25\,\text{m})^2 = 0{,}025\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

31. Para comprobar que al dividir las unidades del momento de la fuerza entre las del momento de inercia se obtienen las de la aceleración angular, es necesario tener presente que las unidades de fuerza, los newton (N), son equivalentes a kg·m·s^{-2}. Entonces:

$$\frac{\left[\vec{M}\right]}{[I]} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2} = \text{s}^{-2} = [\alpha]$$

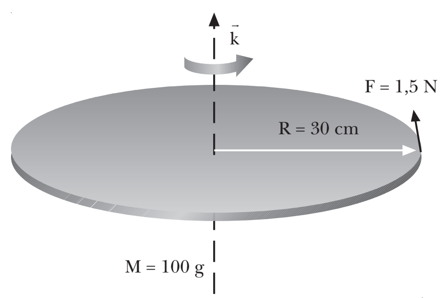
32. La aceleración angular se relaciona con el momento resultante sobre el cuerpo mediante la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$\vec{M} = I\,\vec{\alpha}$$

Por su definición, el momento de inercia es siempre positivo. Por tanto, la aceleración angular tendrá siempre la misma dirección y sentido que el momento resultante.

Nota para el profesor/a: en la página 44 del libro del alumno se aclara que esta ecuación sólo es realmente válida si el eje de rotación es un eje de simetría del cuerpo que permanece fijo o siempre paralelo a sí mismo.

33. Datos:



Calculamos primero el momento de inercia y el momento de la fuerza, para aplicar después la ecuación fundamental de la dinámica de traslación.

Aplicamos la fórmula de la página 42 del libro del alumno para calcular el momento de inercia de un disco macizo:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1\ \text{kg} \cdot (0{,}3\ \text{m})^2 = 0{,}0045\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Para calcular el momento de la fuerza, tenemos en cuenta que $\vec{F}$ y $\vec{R}$ son perpendiculares. Entonces:

$$\left|\vec{M}\right| = F \cdot R = 1{,}5\ \text{N} \cdot 0{,}3\ \text{m}$$

$$\left|\vec{M}\right| = 0{,}45\ \text{N} \cdot \text{m}; \quad \vec{M} = 0{,}45\ \vec{k}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

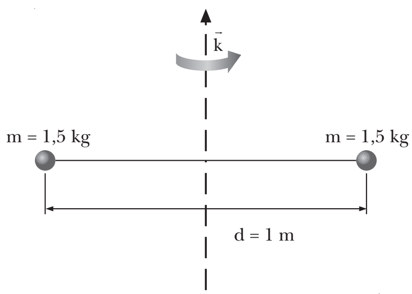
Aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$\vec{M} = I\,\vec{\alpha},\ \vec{\alpha} = \frac{\vec{M}}{I} = \frac{0{,}45\ \vec{k}\ \text{N} \cdot \text{m}}{0{,}0045\ \text{kg} \cdot \text{m}^2} = 100\ \vec{k}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

NOTA: La solución de este ejercicio depende de la elección de los ejes. Una variación de la colocación de los ejes dará una respuesta diferente pero igualmente correcta. La solución que acompaña los ejercicios del libro del alumno se corresponde con la resolución que aparece en este solucionario.

34. Si el eje de rotación es fijo, todas las partículas del sólido rígido giran con velocidad angular de la misma dirección y sentido. Lo que variará entre una partícula y otra será el momento de inercia. Pero como éste es un escalar, el momento angular y la velocidad angular de cada partícula son paralelos y del mismo sentido. Si todas las partículas tienen velocidades angulares de la misma dirección y sentido, todos los momentos angulares serán paralelos.

35. Datos: $m_1 = m_2 = 1{,}5$ kg; d = 1m; $\omega = 4$ rev/s



Escribimos primero la velocidad angular en unidades del SI:

$$\omega = 4\ \frac{\text{rev}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} = 8\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Calculamos el momento de inercia del sistema. La distancia de cada masa al eje de giro será $r = \frac{d}{2} = 0{,}5$ m. Por tanto:

$$I = \sum m_i\ r_i^2 = 2 \cdot 1{,}5\ \text{kg} \cdot (0{,}5\ \text{m})^2 = 0{,}75\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Entonces, el momento angular será:

$$L = I\,\omega = 0{,}75\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 8\pi\ \text{rad/s} = 6\pi\ \text{kg·m}^2/\text{s}$$

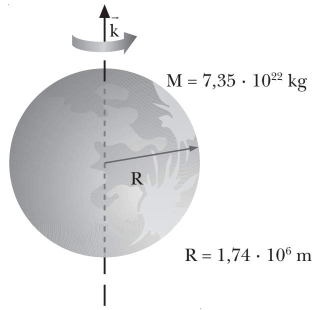
Tenemos en cuenta la orientación de los ejes para escribir el vector:

$$\vec{L} = 6\pi\ \vec{k}\ \text{kg·m}^2/\text{s}$$

NOTA: La solución de este ejercicio depende de la elección de los ejes. Una variación de la colocación de los ejes dará una respuesta diferente pero igualmente correcta. La solución que acompaña los ejercicios del libro del alumno se corresponde con la resolución que aparece en este solucionario.

36. Datos: $M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; $R = 1{,}74 \cdot 10^6$ m;

ω = 1 rev cada 28 días.



Expresamos la velocidad angular en el SI:

$$\omega = \frac{1\ \text{vuelta}}{28\ \text{d}} \cdot \frac{1\ \text{d}}{24\ \text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{vuelta}} = 2{,}6 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Hallamos el momento de inercia a partir de la expresión para una esfera maciza de la página 42 del libro del alumno:

$$I = \frac{2}{5} MR^2 = \frac{2}{5} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot (1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m})^2$$

$$I = 8{,}9 \cdot 10^{34}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Calculamos el momento angular:

$$L = I\omega = 8{,}9 \cdot 10^{34}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{rad/s}$$

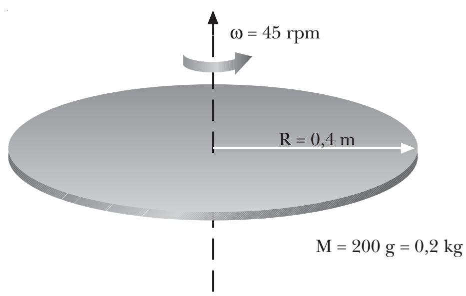
$$L = 2{,}31 \cdot 10^{29}\ \text{kg·m}^2/\text{s}$$

Tenemos en cuenta la orientación de los ejes y que gira hacia el Este:

$$\vec{L} = 2{,}31 \cdot 10^{29}\ \vec{k}\ \ \text{kg·m}^2/\text{s}$$

NOTA: La solución de este ejercicio depende de la elección de los ejes. Una variación de la colocación de los ejes dará una respuesta diferente pero igualmente correcta. La solución que acompaña los ejercicios del libro del alumno se corresponde con la resolución que aparece en este solucionario.

37. Datos:



Expresamos primero la velocidad angular en unidades del SI:

$$\omega = 45\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}\cdot\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\cdot\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}} = 1{,}5\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Aplicamos la fórmula de la página 42 del libro del alumno para calcular el momento de inercia de un disco macizo:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}2\text{ kg}\,(0{,}4\text{ m})^2 = 0{,}016\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Calculamos el momento angular:

$$L = I\omega = 0{,}016\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot 1{,}5\pi\text{ rad/s} = 0{,}024\pi\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

Teniendo en cuenta la orientación de los ejes y el sentido de giro indicado en la figura, escribimos el momento angular en forma vectorial:

$$L = 0{,}024\pi\vec{k}\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

NOTA: La solución de este ejercicio depende de la elección de los ejes. Una variación de la colocación de los ejes dará una respuesta diferente pero igualmente correcta. La solución que acompaña los ejercicios del libro del alumno se corresponde con la resolución que aparece en este solucionario.

38. Si una persona situada sobre una plataforma circular en rotación se desplaza hacia su centro, la distancia de la persona al eje disminuirá. Por tanto, su momento de inercia también será menor. Por la conservación del momento angular, la velocidad angular de la plataforma aumentará y girará más rápido.

39. Datos: R_1 = 30 cm = 0,3 m; M_1 = 0,4 kg; ω_0 = 3 rev/s; R_2 = 20 cm = 0,2 m; M_2 = 0,2 kg

Aplicamos la expresión que aparece en la página 42 del libro del alumno para calcular el momento de inercia de un disco macizo.

$$I_1 = \frac{1}{2}M_1\,{R_1}^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}4\text{ kg}\cdot(0{,}3\text{ m})^2 = 0{,}018\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}M_2\,{R_2}^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}2\text{ kg}\cdot(0{,}2\text{ m})^2 = 0{,}004\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Expresamos la velocidad angular inicial del primer disco en unidades del SI:

$$\omega_0 = 3\,\frac{\text{rev}}{\text{s}}\cdot\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}} = 6\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Inicialmente, todo el momento angular del sistema es debido al primer disco:

$$L_0 = L_1 = I_1\,\omega_0$$
$$L_0 = 0{,}018\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot 6\pi\text{ rad/s} = 0{,}108\pi\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

Al final, cuando los dos discos giran unidos, el momento de inercia será la suma de los dos, y por tanto, su momento angular:

$$L = (I_1 + I_2)\,\omega$$

Aplicamos ahora la conservación del momento angular para hallar la velocidad angular final:

$$L = L_0;\quad \omega = \frac{L_0}{I_1 + I_2}$$

$$\omega = \frac{0{,}108\pi\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{0{,}018\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0{,}004\text{ kg}\cdot\text{m}^2} = 4{,}9\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega = 15{,}4\text{ rad/s}$$

$$\omega = 15{,}4\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot\frac{1\text{ vuelta}}{2\pi\text{ rad}} = 2{,}45\,\frac{\text{vueltas}}{\text{s}}$$

40. Datos: ω_0 = 30 rpm; r_0 = 70 cm = 0,7 m;

m = 350 g = 0,35 kg; I_{plat} = 120 kg/m^2;

r = 53 cm = 0,35 m

Aplicamos el principio de conservación del momento angular, teniendo en cuenta que los momentos de inercia de la niña en la plataforma y de las masas que sostiene con sus manos se suman:

$$L_0 = L;\quad I_0\,\omega_0 = I\omega$$

$$\left(I_{plat} + 2\,mr_0^2\right)\omega_0 = \left(I_{plat} + 2\,mr^2\right)\omega$$

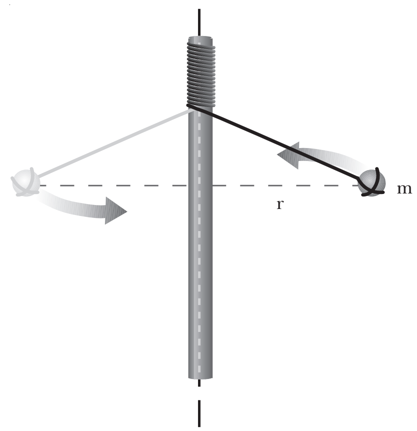
$$\omega = \frac{\left(I_{plat} + 2\,mr_0^2\right)\omega_0}{I_{plat} + 2\,mr^2}$$

$$\omega = \frac{\left(120\text{ kg/m}^2 + 2\cdot 0{,}35\text{ kg}\cdot(0{,}7\text{ m})^2\right)30\text{ rpm}}{120\text{ kg/m}^2 + 2\cdot 0{,}35\text{ kg}\cdot(0{,}35\text{ m})^2}$$

$$\omega = 30{,}06\text{ rpm}$$

$$\omega = 30{,}06\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}\cdot\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\cdot\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}} = 3{,}15\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

41. Una experiencia sencilla para observar la conservación del momento angular es la siguiente:



— Montamos un dispositivo como el de la figura: en una barra vertical (puede servir, por ejemplo, la pata de una mesa) atamos una cuerda con una bola o cualquier objeto un poco pesado en el extremo.

— Damos impulso a la bola y la hacemos girar alrededor de la barra. Al irse enroscando la cuerda en la barra, la distancia de la bola a la barra (eje de rotación) irá disminuyendo. Por tanto, disminuirá su momento de inercia. Como consecuencia de la conservación del momento angular, observaremos que la bola gira cada vez con mayor velocidad.

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 47)

a) Se trata de un movimiento vertical:

$$y = y_0 + v_0\,(t - t_0) - \frac{1}{2}\,g\,(t - t_0)^2\ ;\ v = v_0 - g\,(t - t_0)$$

El cuerpo llega al suelo cuando y = 0. Si la velocidad inicial es cero y $t_0 = 0$:

$$y = 0 = y_0 - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

La velocidad en este instante será, en módulo:

$$|v| = gt = \sqrt{2y_0\,g}$$

Calculamos la velocidad del impacto:

— Desde la estatua de la Libertad (y_0 = 92 m):

$$|v| = \sqrt{2y_0\,g} = \sqrt{2 \cdot 92\ \mathrm{m} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}} = 42{,}5\ \mathrm{m/s}$$

$$|v| = 42{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1\,000\ \mathrm{m}} \cdot \frac{3\,600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}} = 153\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

— Del Taj Majal (y_0 = 95 m):

$$|v| = \sqrt{2y_0\,g} = \sqrt{2 \cdot 95\ \mathrm{m} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}$$

$$|v| = 43{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1\,000\ \mathrm{m}} \cdot \frac{3\,600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}} = 155{,}5\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

— Del segundo piso de la torre Eiffel (y_0 = 116 m):

$$|v| = \sqrt{2y_0\,g} = \sqrt{2 \cdot 116\ \mathrm{m} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}$$

$$|v| = 47{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1\,000\ \mathrm{m}} \cdot \frac{3\,600\ \mathrm{s}}{1\mathrm{h}} = 171{,}7\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

b) Respuesta sugerida:

Los excesos de velocidad causan alrededor del 30% de los accidentes en carretera y además agravan las consecuencias de otros percances en los que no son la causa directa del accidente.

Fuente: Dirección General de Tráfico

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS (pág. 49)

42. Datos: M = 5 kg; R = 0,75 m; F = 20 N;

t = 3 min = 180 s

a) Calculamos el momento de la fuerza, sabiendo que actúa en la periferia y es perpendicular al radio:

$$|\vec{M}| = F \cdot R = 20\ \mathrm{N} \cdot 0{,}75\ \mathrm{m} = 15\ \mathrm{N \cdot m}$$

b) Hallamos primero el momento de inercia del cilindro, utilizando la expresión correspondiente de la página 42 del libro del alumno. A continuación, aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica de rotación para calcular la aceleración angular:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 5\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}75\ \mathrm{m})^2 = 1{,}4\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$|\vec{M}| = I\,|\vec{\alpha}|;\quad |\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{M}|}{I} = \frac{15\ \mathrm{N \cdot m}}{1{,}4\ \mathrm{kg \cdot m}} = 10{,}67\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s^2}}$$

c) Aplicamos la ecuación del MCUA:

$$\omega = \alpha t = 10{,}67\ \mathrm{rad/s^2} \cdot 180\ \mathrm{s} = 1\,921\ \mathrm{rad/s}$$

43. Datos: M_p = 1 kg; R = 25 cm = 0,25 m; m_c = 2 kg

Se trata de una combinación del movimiento de rotación de la polea con el de traslación del cuerpo colgado.

Planteamos las ecuaciones fundamentales de la dinámica de traslación y de rotación, y las relaciones entre aceleración angular y tangencial.

a) La tensión de la cuerda valdrá lo mismo sobre el cuerpo que sobre la polea, y ejercerá un momento sobre ésta. Como actúa en la periferia y es perpendicular al radio:

$$M = R\,T$$

Este momento provoca una aceleración angular de la polea. Hallamos el momento de inercia de ésta a partir de la fórmula de la página 42 del libro del alumno y aplicamos la ley fundamental de la dinámica de rotación:

$$I_{polea} = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\ \mathrm{kg}\,(0{,}25\ \mathrm{m})^2 = 0{,}031\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$M = I\alpha$$

Por otro lado, la aceleración lineal del cuerpo colgado se relaciona con la aceleración angular de la polea:

$$a = a_t = \alpha R$$

b) Aplicamos la ley fundamental de la dinámica de traslación al cuerpo:

$$F = p - T = m_c\,a$$

Con las cuatro ecuaciones anteriores, tenemos un sistema que resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} M &= RT \\ M &= I\alpha \end{aligned}\right\}\ RT = I\alpha;\quad T = \frac{I\alpha}{R}$$

$$a = \alpha R;\quad p - T = m_c\,a$$

$$p = m_c\,g = 2\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{N/kg} = 19{,}6\ \mathrm{N}$$

$$p - \frac{I\alpha}{R} = m_c\,R;\quad \alpha = \frac{pR}{m_c R^2 + I}$$

$$\alpha = \frac{19{,}6\ \mathrm{N} \cdot 0{,}25\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}25\ \mathrm{m})^2 + 0{,}031\ \mathrm{kg \cdot m^2}} = 31{,}4\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s^2}}$$

$$a = \alpha R = 31{,}4\ \mathrm{rad/s^2} \cdot 0{,}25\ \mathrm{m} = 7{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

$$T = \frac{I\alpha}{R} = \frac{0{,}031\ \mathrm{kg \cdot m^2} \cdot 31{,}4\ \mathrm{rad/s^2}}{0{,}25\ \mathrm{m}} = 3{,}9\ \mathrm{N}$$

c) Aplicamos la ecuación del MRUA para hallar la velocidad del cuerpo a los 20 s de dejarlo libre:

$$v = v_0 + at; \quad v = at = 7{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 20\ \text{s} = 157\ \text{m/s}$$

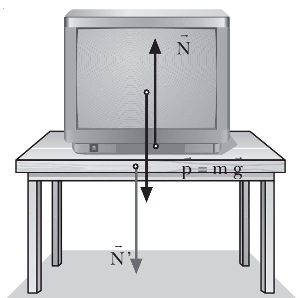
EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 50 y 51)

44. El vector desplazamiento es la diferencia entre el vector de posición final y el vector de posición inicial, por tanto es una magnitud vectorial. Su módulo representa la distancia (en línea recta) entre la posición inicial y la posición final. En cambio, la distancia recorrida es una magnitud escalar y se mide sobre la trayectoria, desde la posición inicial hasta la posición final.

— El módulo del vector desplazamiento y la distancia recorrida sólo coinciden en caso de que la trayectoria sea una recta y no exista inversión del movimiento.

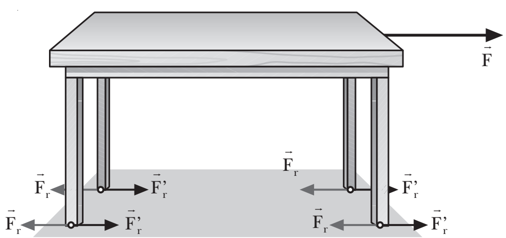
45. Si la aceleración es constante en módulo y perpendicular a la trayectoria en todo momento, se trata de un movimiento circular uniforme. La aceleración sólo tiene componente normal, siendo nula la componente tangencial. Además, la componente normal es constante, por lo que el módulo de la velocidad lineal es constante, y también es constante la velocidad angular.

46. *a)* Representamos la normal y su reacción en el caso de un cuerpo, como un televisor, apoyado sobre una mesa.



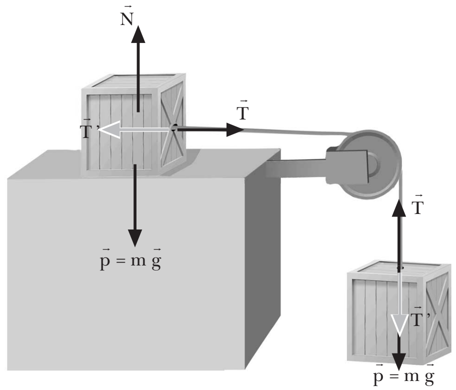
La normal es la fuerza de contacto que ejerce la mesa sobre el televisor. Es la reacción de otra fuerza de contacto que ejerce el televisor sobre la mesa, N'. La normal no es la reacción del peso. El peso es ejercido por la Tierra sobre el televisor, y su reacción es ejercida por el televisor sobre la Tierra. La reacción del peso se aplica, por tanto, en el centro de la Tierra. La normal, en cambio, se aplica en la superficie de contacto entre el televisor y la mesa.

b)



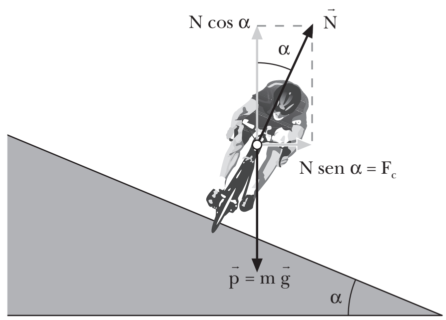
El rozamiento, F_r, que se opone al desplazamiento de una mesa es ejercido por el suelo sobre ésta. Se aplica en la superficie de contacto entre la mesa y el suelo. Su reacción es la fuerza F'_r, aplicada sobre el suelo.

c)



La tensión que ejerce la cuerda sobre el bloque, T, se aplica sobre el bloque, y su reacción, T', la ejerce el bloque sobre la cuerda.

47.



El ciclista no cae porque la componente vertical de la normal equilibra el peso, y la componente horizontal de la normal se emplea en hacerlo girar. La componente horizontal de la normal coincide con la fuerza centrípeta.

48. *a)* Si la cantidad de movimiento de una masa puntual que describe una trayectoria circular se reduce a la mitad, se reduce también a la mitad su velocidad angular. Por tanto, su nuevo momento angular será también la mitad.

b) Si el radio del círculo se triplica manteniendo constante la velocidad lineal, el momento de inercia aumentará, y también lo hará el momento angular. Concretamente, podemos relacionar el momento angular y la velocidad lineal, teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{l} L = I\omega \\ \omega = \dfrac{v}{r} \end{array}\right\} \; L = I\,\frac{v}{r} = mr^2\,\frac{v}{r} = mvr$$

Por tanto, si el radio se triplica, el momento angular se triplica.

49. Datos: $\vec{r}(t) = (t^2 - 3t)\,\vec{i} + (2t^2 + 4)\,\vec{j}$, en unidades SI

a) Para hallar la velocidad media, primero calculamos los vectores de posición en los instantes inicial y final y el vector desplazamiento:

$$\vec{r}(1\,s) = (1^2 - 3\cdot 1)\,\vec{i} + (2\cdot 1^2 + 4)\,\vec{j} = (-2\,\vec{i} + 6\,\vec{j})\,m$$

$$\vec{r}(2\,s) = (2^2 - 3\cdot 2)\,\vec{i} + (2\cdot 2^2 + 4)\,\vec{j} = (-2\,\vec{i} + 12\,\vec{j})\,m$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(2\,s) - \vec{r}(1\,s) = (-2\,\vec{i} + 6\,\vec{j})\,m - (-2\,\vec{i} + 12\,\vec{j})\,m$$

$$\Delta\vec{r} = (6\,\vec{j})\,m$$

Aplicamos la definición de velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(2\,s) - \vec{r}(1\,s)}{2\,s - 1\,s} = \frac{(6\,\vec{j})\,m}{1\,s} = (6\,\vec{j})\,\frac{m}{s}$$

b) La velocidad instantánea para cualquier instante de tiempo t se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación del movimiento:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2\,t - 3)\,\vec{i} + 4t\,\vec{j}\text{, en unidades SI}$$

c) Para hallar la aceleración media, primero calculamos la velocidad en los instantes t = 1 s y t = 2 s:

$$\vec{v}(1\,s) = (2\cdot 1 - 3)\,\vec{i} + 4\cdot 1\,\vec{j} = (-\vec{i} + 4\,\vec{j})\,m/s$$

$$\vec{v}(2\,s) = (2\cdot 2 - 3)\,\vec{i} + 4\cdot 2\,\vec{j} = (\vec{i} + 8\,\vec{j})\,m/s$$

Aplicamos la definición de aceleración media:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(2\,s) - \vec{v}(1\,s)}{2\,s - 1\,s} = \frac{(2\,\vec{i} + 4\,\vec{j})\,m/s}{1\,s}$$

$$\vec{a}_m = (2\,\vec{i} + 4\,\vec{j})\,m/s^2$$

d) La aceleración instantánea para cualquier instante de tiempo t se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación de la velocidad:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (2\,\vec{i} + 4\,\vec{j})\,\frac{m}{s^2}$$

50. Datos: $\vec{a} = 6\,t\,\vec{i}$, $\vec{v}_0 = -8\,\vec{i}\ m/s$; $\vec{r}_0 = 9\,\vec{i}\ m$

Obtendremos el vector velocidad integrando la aceleración:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt = -8\,\vec{i} + \int_0^t 6t\,\vec{i}\,dt$$

$$\vec{v}(t) = \left(-8\,\vec{i} + \frac{6t^2}{2}\,\vec{i}\right)\ (SI) = (3\,t^2 - 8)\,\vec{i}\ \ (SI)$$

El vector de posición se halla integrando el vector velocidad:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt = 9\,\vec{i} + \int_0^t (3\,t^2 - 8)\,\vec{i}\,dt$$

$$\vec{r}(t) = (t^3 - 8\,t + 9)\,\vec{i}\ \ (SI)$$

51. Datos: $y_{10} = 0$ m; $v_{20} = 0$ m/s; $v_{10} = 30$ m/s; $y_{20} = 20$ m

Escribimos primero las ecuaciones de la posición de cada piedra:

$$y_1 = y_{10} + v_{10}\,t - \frac{1}{2}gt^2;\quad y_1 = 30\,\frac{m}{s}\,t - \frac{1}{2}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

$$y_2 = y_{20} + v_{20}\,t - \frac{1}{2}gt^2;\quad y_2 = 20\,m - \frac{1}{2}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

Las dos piedras se encontrarán cuando $y_1 = y_2$. Igualando las dos posiciones, obtenemos el momento en que se encuentran:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow 30\,t - 4{,}9\,t^2 = 20 - 4{,}9\,t^2$$

$$30\,t = 20$$

$$t = \frac{20}{30}\,s = 0{,}67\,s$$

Sustituyendo este valor del tiempo en la ecuación de la posición de la primera piedra obtenemos la altura a que se encuentran:

$$y = 30\,\frac{m}{s}\cdot 0{,}67\,s - 4{,}9\,\frac{m}{s^2}\,(0{,}67\,s)^2 = 17{,}8\,m$$

52 Datos: $v_y = 810$ km/h; $v_x = 144$ km/h

Expresamos las velocidades en unidades del SI:

$$v_x = 144\,\frac{km}{h}\cdot\frac{1h}{3\,600\,s}\cdot\frac{1\,000\,m}{1\,km} = 40\,\frac{m}{s}$$

$$v_y = 810\,\frac{km}{h}\cdot\frac{1\,h}{3\,600\,s}\cdot\frac{1\,000\,m}{1\,km} = 225\,\frac{m}{s}$$

Escribimos las ecuaciones del movimiento en cada eje:

$$x = x_o + v_x\,t;\quad x = 40\,\frac{m}{s}\,t$$

$$y = y_o + v_y\,t;\quad y = 224\,\frac{m}{s}\,t$$

a) Para obtener el tiempo que tarda el avión en avanzar 1 km en dirección Norte, imponemos y = 1 km = 1 000 m:

$$y = 1\,000\,m = 225\,\frac{m}{s}\,t$$

$$t = \frac{1\,000\,m}{225\,m/s} = 4{,}4\,s$$

b) En la dirección Norte avanza 1 km. Calculamos cuánto avanza en la dirección Este:

$$x = 40\,\frac{m}{s}\,t = 40\,\frac{m}{s}\cdot 4{,}4\,s = 176\,m$$

La distancia recorrida sobre la Tierra será la composición de los dos desplazamientos:

$$|\Delta r| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(176\,m)^2 + (1\,000\,m)^2} = 1\,015{,}4\,m$$

c) Hallamos la ecuación de la trayectoria a partir de las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 40\,t \\ y = 225\,t \end{cases};\ t = \frac{x}{40};\ y = 225\cdot\frac{x}{40} = \frac{45\,x}{8}$$

La trayectoria es una recta.

53. Datos: $y_0 = 20$ m ; v = 10 m/s; $\alpha = 45°$

Ecuaciones del movimiento:

$$x = x_0 + v_{0x}t;\;\; x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 10\,\frac{m}{s}\cos 45°\,t$$

$$y = y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = 20\text{ m} + 10\,\frac{m}{s}\,\text{sen }45°\,t - \frac{1}{2}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

a) La pelota llegará al suelo cuando y = 0:

$$y = 0 = 20 + 10\,\text{sen }45°\,t - 4{,}9t^2$$

$$4{,}9t^2 - 7{,}1t - 20 = 0$$

La solución positiva de esta ecuación es:

$$t = 2{,}9\text{ s}$$

b) Hallamos la ecuación de la trayectoria a partir de las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 10\cos 45°t \\ y = 20 + 10\,\text{sen }45°\,t - 4{,}9t^2 \end{cases} \qquad t = \frac{x}{10\cos 45°};$$

$$y = 20 + 10\,\frac{x\,\text{sen }45°}{10\cos 45°} - 4{,}9\,\frac{x^2}{10^2\cos^2 45°}$$

$$y = 20 + x - 0{,}1x^2$$

La trayectoria es una parábola.

c) Calculamos, a partir de la ecuación de la trayectoria, la altura de la pelota cuando llega a la pared (x = 20 m):

$$y = 20 + x - 0{,}1x^2 = 20 + 20 - 0{,}1\,(20)^2$$

$$y = 0\text{ m}$$

La pelota caerá al suelo justo en la base de la pared y no llegará a chocar.

54. Datos: R = 20 cm = 0,2 m; ω = 20 rpm

a) Expresamos la velocidad angular en rad/s:

$$\omega = 20\text{ rpm} = 20\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}\cdot\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\cdot\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}} = \frac{2\pi}{3}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) La velocidad de los puntos de la periferia (R = 0,2 m) será:

$$v = \omega\cdot R = \frac{2\,\pi}{3}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot 0{,}2\text{ m} = 0{,}42\,\frac{m}{s}$$

Para los puntos situados a 5 cm del centro, R = 5 cm = = 0,05 m. Por tanto:

$$v = \omega\cdot R = \frac{2\,\pi}{3}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot 0{,}05\text{ m} = 0{,}10\,\frac{m}{s}$$

c) Calculamos el ángulo descrito en 10 s utilizando la ecuación del MCU:

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{3}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot 10\text{ s} = \frac{20\pi}{3}\text{ rad}$$

El número de revoluciones (o vueltas) será:

$$\frac{20\pi}{3}\text{ rad}\cdot\frac{1\text{ vuelta}}{20\pi\text{ rad}} = 3{,}3\text{ vueltas}$$

55. Datos: M = 2 kg; m = 10 g = 0,01 kg; $\vec{v}_b = 150\vec{i}$ m/s

Si no actúa ninguna fuerza externa sobre el sistema, el momento lineal o cantidad de movimiento se conserva.

Inicialmente el sistema está en reposo, de forma que la cantidad de movimiento es nula. Cuando se dispara la bala, la cantidad de movimiento total tiene que ser la misma. Por tanto:

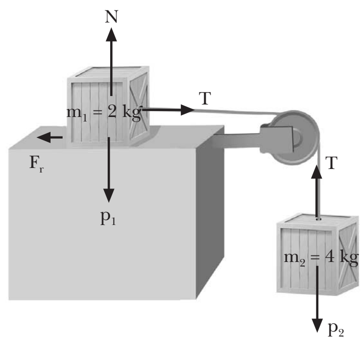
$$\vec{p} - 0 = m\,\vec{v}_b + M\,\vec{v}_e$$

Despejando la velocidad de la escopeta:

$$\vec{v}_e = -\frac{m\,\vec{v}_b}{M} = -\frac{0{,}01\text{ kg}\cdot 150\,\vec{i}\text{ m/s}}{2\text{ kg}} = -0{,}75\,\vec{i}\,\frac{m}{s}$$

$$|v_e| = 0{,}75\text{ m/s}$$

56. Datos:



El sistema se moverá hacia la derecha. Escribimos la segunda ley de Newton para cada cuerpo:

Cuerpo 1: $T - F_r = m_1\,a;\;\; T - \mu_c\,N = m_1\,a$

$$T - \mu_c\,m_1\,g = m_1\,a$$

Cuerpo 2: $p_2 - T = m_2\,a;\;\; m_2\,g - T = m_2\,a$

Sumamos las dos ecuaciones:

$$m_2\,g - \mu_c\,m_1\,g = (m_1 + m_2)\,a$$

Despejamos la aceleración:

$$a = \frac{m_2\,g - \mu_c\,m_1\,g}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{4\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 - 0{,}2\cdot 2\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2}{2\text{ kg} + 4\text{ kg}} = 5{,}9\,\frac{m}{s^2}$$

Sustituimos la aceleración en la ecuación del cuerpo 2 para obtener la tensión:

$$m_2\,g - T = m_2\,a \Rightarrow T = m_2\,(g - a)$$

$$T = 4\text{ kg}\cdot(9{,}8\text{ m/s}^2 - 5{,}9\text{ m/s}^2)$$

$$T = 15{,}6\text{ N}$$

57. Datos: M = 60 g = 0,06 kg; R = 8 cm = 0,08 m

Calculamos el momento de inercia a partir de la expresión que aparece en la página 42 del libro del alumno:

$$I = \frac{2}{3} MR^2 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}06 \text{ kg} \cdot (0{,}08 \text{ m})^2 = 2{,}56 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

58. Datos: m = 150 g = 0,15 kg; ω = 3 rev/s;

r_0 = 20 cm = 0,2 m; r = 5 cm = 0,05 m

Aplicamos la conservación del momento angular:

$$L_0 = L; \quad I_0\omega_0 = I\omega; \quad \omega = \frac{I_0\omega_0}{I}$$

$$\omega = \frac{m{r_0}^2 \cdot 3 \text{ vueltas/s}}{mr^2} = \frac{(0{,}2 \text{ m})^2 \, 3 \text{ vueltas/s}}{(0{,}05 \text{ m})^2}$$

$$\omega = 48 \, \frac{\text{vueltas}}{\text{s}} = 96\pi \, \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

59. Datos: d = 2 km = 2 000 m; a_A = 2 m/s², v_{0A} = 0;

a_B = 0, v_B = – 72 km/h

Expresamos la velocidad del segundo automóvil en m/s:

$$v_B = -72 \, \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = -20 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tomamos como origen de la posición y del tiempo la salida de A. Entonces, las ecuaciones del movimiento de cada automóvil son:

$$\text{A: } x_A = x_{0A} + v_{0A}t + \frac{1}{2} a_A t^2$$

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 = 1 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \, t^2$$

$$\text{B: } x_B = x_{0B} + v_B t$$

$$x_B = d + v_B \, t = 2\,000 \text{ m} - 20 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \, t$$

Se encontrarán cuando coincidan sus posiciones. Igualando $x_A = x_B$ obtenemos el tiempo que tardan en encontrarse desde la partida de A:

$$x_A = x_B \, ; \, 1 \cdot t^2 = 2\,000 - 20t$$

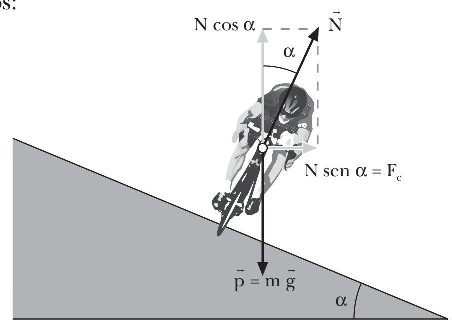
$$t^2 + 20\,t - 2\,000 = 0$$

$$t = 36{,}3 \text{ s}$$

Sustituyendo este tiempo en la ecuación de A, hallamos la posición en que se encuentran, medida desde A:

$$x_A = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \, t^2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (36{,}3 \text{ s})^2 = 1\,314{,}8 \text{ m}$$

60. Datos:



a) Cuando no existe rozamiento, la fuerza centrípeta es igual a la componente horizontal de la normal. Aplicamos la segunda ley de Newton en cada eje:

Eje X: $N \text{ sen } \alpha = F_c$

Eje Y: $N \cos \alpha - m\,g = 0; \quad N \cos \alpha = m\,g$

Dividimos las dos ecuaciones entre sí:

$$\frac{N \text{ sen } \alpha}{N \cos \alpha} = \frac{F_c}{m\,g}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{F_c}{m\,g}$$

Sustituimos la expresión de la fuerza centrípeta y despejamos la velocidad:

$$\text{tg } \alpha = \frac{m \frac{v^2}{R}}{m\,g} = \frac{v^2}{gR}$$

$$v = \sqrt{gR \text{ tg } \alpha} = \sqrt{9{,}8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m} \cdot \text{tg } 30°} = 16{,}8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Convertimos la velocidad a unidades del SI:

$$v_{max} = 80 \, \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 22{,}2 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Calculamos el ángulo de peralte a partir de la expresión de tg α encontrada en el apartado anterior:

$$\text{tg } \alpha = \frac{v^2}{gR}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{(22{,}2 \text{ m/s})^2}{9{,}8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m}} = 1$$

$$\alpha = 45°$$

61. Datos: M = 0,5 kg; R = 0,4 m; ω_0 = 30 rpm

Expresamos la velocidad angular inicial y el número de vueltas en el SI :

$$\omega_0 = 30 \, \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = \pi \, \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\phi = 15 \text{ vueltas} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} = 30\pi \text{ rad}$$

Calculamos el momento de inercia del disco a partir de la expresión de la página 42 del libro del alumno:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \text{ kg} \cdot (0{,}4 \text{ m})^2 = 0{,}04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

a) Determinamos la energía cinética y el momento angular iniciales:

$$Ec = \frac{1}{2} I\omega_0^2 = \frac{1}{2} 0{,}04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \left(\pi \text{ rad/s}\right)^2 = 0{,}2 \text{ J}$$

$$L = I\omega_0 = 0{,}04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \pi \text{ rad/s} = 0{,}04\pi \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

b) Aplicamos las ecuaciones del MCUA para encontrar la aceleración angular de frenado y el tiempo que tarda en pararse:

$$\left.\begin{array}{l} \phi - \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{array}\right\} \quad 2\alpha\phi = \omega^2 - {\omega_0}^2$$

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0{}^2}{2\phi} = \frac{-(\pi\ \mathrm{rad/s})^2}{2 \cdot 30\pi\ \mathrm{rad}}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{60}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

c) El tiempo que tarda es:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{-\pi \mathrm{rad/s}}{-\frac{\pi}{60} \mathrm{rad/s}} = 60\ \mathrm{s}$$

d) Determinamos el momento de la fuerza aplicada a partir de la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$|\vec{M}| = I\,|\vec{\alpha}|; \quad M = I\alpha = 0{,}04\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{60}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\right)$$

$$|\vec{M}| = -2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot m}$$

e) Como la fuerza es tangencial a la periferia:

$$|\vec{M}| = F \cdot R; \quad F = \frac{|\vec{M}|}{R} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot m}}{0{,}8\ \mathrm{m}} = 5{,}25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

62. Datos: M = 1 kg; m = 2 kg; R = 0,4 m; y = 980 m

Se trata de una combinación del movimiento de rotación de la polea con el de traslación del cuerpo colgado.

Planteamos las ecuaciones fundamentales de la dinámica de traslación y de rotación, y las relaciones entre aceleración angular y tangencial.

— La tensión de la cuerda valdrá lo mismo sobre el cuerpo que sobre la polea y ejercerá un momento sobre ésta. Como actúa en la periferia y es perpendicular al radio:

$$M = RT$$

Este momento provoca una aceleración angular de la polea. Hallamos el momento de inercia de ésta a partir de la fórmula de la página 42 del libro del alumno y aplicamos la ley fundamental de la dinámica de rotación:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}4\ \mathrm{m})^2 = 0{,}08\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$M = I\alpha$$

— Por otro lado, la aceleración lineal del cuerpo colgado se relaciona con la aceleración angular de la polea:

$$a = at = \alpha R$$

— Aplicamos la ley fundamental de la dinámica de traslación al cuerpo:

$$F = p - T = m\ a$$

Con las anteriores ecuaciones, tenemos un sistema que resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} M = RT \\ M = I\alpha \end{array}\right\} RT = I\alpha; \quad T = \frac{I\alpha}{R}$$

$$a = \alpha R$$

$$p - T = m\ a; \quad p = \frac{I\alpha}{R} = m\alpha R; \quad \alpha = \frac{PR}{mR^2 + I}$$

$$p = m\ g = 2\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{N/kg} = 19{,}6\ \mathrm{N}$$

$$\alpha = \frac{19{,}6\ \mathrm{N} \cdot 0{,}4\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}4\ \mathrm{m})^2 + 0{,}08\ \mathrm{kg \cdot m^2}} = 19{,}6\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a = \alpha R = 19{,}6\ \mathrm{rad/s^2} \cdot 0{,}4\ \mathrm{m} = 7{,}84\ \mathrm{m/s^2}$$

Aplicamos la ecuación del MRUA para hallar la velocidad del cuerpo cuando ha bajado 980 m:

$$2ay = v^2 - v_0{}^2; \quad v_0 = 0$$

$$v = \sqrt{2ay} = \sqrt{2 \cdot 7{,}84\ \mathrm{m/s^2} \cdot 980\ \mathrm{m}} = 124\ \mathrm{m/s}$$

Relacionamos la velocidad lineal del cuerpo con la velocidad angular de la polea:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{124\ \mathrm{m/s}}{0{,}4\ \mathrm{m}} = 310\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 51)

1. Datos: $\vec{a} = (12t^2 - 6t)\ \vec{i}$; $\vec{v}_0 = 5\ \vec{i}\ \mathrm{m/s}$; $\vec{r}_0 = -5\ \vec{i}\ \mathrm{m}$

Integrando la aceleración, se halla la velocidad en función del tiempo:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\ dt = 5\ \vec{i} + \int_0^t (12t^2 - 6t)\ \vec{i}\ dt$$

$$\vec{v} = 5\ \vec{i} + (4t^3 - 3t^2)\ \vec{i}$$

$$\vec{v} = (4t^3 - 3t^2 - 5)\ \vec{i}\ \text{(unidades SI)}$$

Para hallar la ecuación de la posición integramos la ecuación de la velocidad que acabamos de obtener:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}\ dt = -5\ \vec{i} + \int_0^t (4t^3 - 3t^2 + 5)\ \vec{i}\ dt$$

$$\vec{r} = -5\ \vec{i} + (t^4 - t^3 + 5t)\ \vec{i}$$

$$\vec{r} = (t^4 - t^3 + 5t - 5)\ \vec{i}\ \text{(unidades SI)}$$

2. Datos: y_0 = 10 m; v_0 = 360 km/h; α = 40°

Expresamos la velocidad en m/s:

$$v_0 = 360\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{1\ \mathrm{h}}{3\,600\ \mathrm{s}} \cdot \frac{1\,000\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}} = 100\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$x = x_0 + v_{0x}t; \quad x = v_0 \cos \alpha t = 100\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos 40° \cdot t$$

$$v_x + v_{0x} = v_0 \cos \alpha; \quad v_x = 100\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos 40°$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2; \quad y = y_0 + v_0\ \mathrm{sen}\ \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = 10\ \mathrm{m} + 100\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{sen}\ 40° t - 4{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ t^2$$

$$v_y = v_{0y} - gt; \quad v_y = v_0\ \mathrm{sen}\ \alpha - gt$$

$$v_y = 100\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{sen}\ 40° - 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ t$$

a) La altura máxima se alcanza cuando la componente vertical de la velocidad es nula. Imponiendo $v_y = 0$ obtenemos el tiempo en que el proyectil alcanza la altura máxima:

$$v_y = 0; \quad v_0 \text{ sen } \alpha - gt = 0$$

$$t = \frac{v_0 \text{ sen } \alpha}{g} = \frac{100 \text{ m/s sen } 40°}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 6{,}5 \text{ s}$$

Sustituimos este tiempo en la ecuación de la posición vertical para hallar la altura máxima:

$$y = 10 \text{ m} + 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{sen } 40° \cdot 6{,}5 \text{ s} - 4{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (6{,}5 \text{ s})^2$$

$$y = 220{,}9 \text{ m}$$

b) Calculamos la posición 3 s después del lanzamiento sustituyendo t = 3 s en las ecuaciones de cada componente de la posición:

$$x(3 \text{ s}) = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 40° \cdot 3 \text{ s} = 229{,}8 \text{ m}$$

$$y(3 \text{ s}) = 10 \text{ m} + 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{sen } 40° \cdot 3 \text{ s} - 4{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (3 \text{ s})^2$$

$$y(3 \text{ s}) = 158{,}8 \text{ m}$$

$$\vec{r}(3 \text{ s}) = \left(229{,}8, 158{,}8\right) \text{m}$$

c) El momento en que el proyectil llega al suelo se obtiene imponiendo que la coordenada y sea cero.

$$y = 0 = 10 \text{ m} + 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{sen } 40° \text{ t} - 4{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{t}^2$$

$$4{,}9t^2 - 64{,}3t - 10 = 0$$

La solución positiva de la ecuación es:

$$t = 13{,}3 \text{ s}$$

Introduciendo este tiempo en la ecuación de x hallamos el alcance:

$$x = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 40° \cdot 13{,}3 \text{ s}$$

$$x = 1\,017{,}2 \text{ m}$$

3. Datos: ω_0 = 60 rev/min; α = – 2 rad/s^2

La velocidad angular en rad/s es:

$$\omega_o = 60 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La ecuación de la velocidad angular para MCUA es:

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

Imponemos ω = 0 para hallar el tiempo que tarda el disco en parar:

$$\omega = 0 = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = -\frac{\omega_0}{\alpha} = -\frac{2\pi \text{ rad/s}}{-2 \text{ rad/s}^2} = 3{,}14 \text{ s}$$

4. Las fuerzas de acción y reacción aparecen siempre por parejas. Si un cuerpo 1 ejerce una fuerza sobre un cuerpo 2 (acción), este cuerpo 2 ejercerá otra fuerza sobre el cuerpo 1 (reacción). Las fuerzas de acción y reacción tienen el mismo módulo y dirección, y sentidos opuestos.

5. Datos: M = 45 kg; m = 300 g = 0,3 kg; $v_d = 12\ \vec{i}$ m/s

Aplicamos el teorema de la conservación de la cantidad de movimiento. Inicialmente, el patinador y el disco están en reposo. Por lo tanto, la cantidad de movimiento total es cero.

Entonces:

$$\vec{p} = 0; \ M\vec{v}_p + m\vec{v}_d = 0$$

$$\vec{v}_p = -\frac{m\vec{v}_d}{M} = -\frac{0{,}3 \text{ kg}}{75 \text{ kg}} 12\ \vec{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

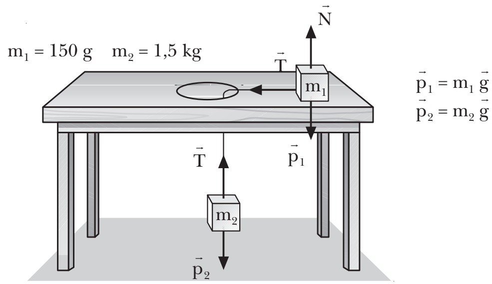
$$\vec{v}_p = -0{,}048\ \vec{i} \text{ m/s} = -4{,}8 \cdot 10^{-2}\ \vec{i} \text{ m/s}$$

El módulo de la velocidad del patinador es:

$$v_p = -4{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

6. Datos: m_1 = 150 g = 0,15 kg; R = 20 cm = 0,2 m; m_2 = 1,5 kg

a)



b) Escribimos la segunda ley de Newton para cada cuerpo:

Cuerpo 1: $T = F_c; \quad T = m_1 \dfrac{v^2}{R}$

Cuerpo 2: $T - m_2 g = 0$

Hallamos la tensión de la cuerda a partir de la ecuación del cuerpo 2:

$$T = m_2 g$$

Sustituimos la tensión en la ecuación del cuerpo 1 y despejamos la velocidad lineal:

$$m_2 g = m_1 \frac{v^2}{R}; \quad v = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} Rg}$$

$$v = \sqrt{\frac{1{,}5 \text{ kg}}{0{,}15 \text{ kg}} \cdot 0{,}2 \text{ m} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 4{,}4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La componente tangencial de la aceleración es nula por ser un MCU. La componente normal es debida a la tensión. Calculamos la componente normal:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(4{,}4 \text{ m/s})^2}{0{,}2 \text{ m}} = 96{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

7. Un buen ejemplo de conservación angular es un patinador dando vueltas, realizando una pirueta. Inicialmente, el patinador extiende los brazos y a veces la pierna, y gira con cierta velocidad angular. Como sobre él no actúa ningún momento, al bajar la pierna y acercar los brazos al eje de rotación, por ejemplo, estirándolos hacia arriba, su velocidad angular aumenta. Por eso a menudo vemos a los patinadores acabar sus piruetas girando a gran velocidad, sin que ello les suponga un esfuerzo adicional.

8. Datos: $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R = 1{,}5 \cdot 10^{8}$ km $= 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

   Determinamos el momento de inercia a partir de su definición:

$$I = MR^2 = 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2$$

$$I = 1{,}35 \cdot 10^{47}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

9. Datos: $R = 0{,}5$ m; $I = 1$ kg·m^2; $F = 2$ N

   a) Calculamos el momento de la fuerza y aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica de traslación:

$$\left|\vec{M}\right| = F \cdot R = 1\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\left|\vec{M}\right| = I\left|\vec{\alpha}\right|; \quad \left|\vec{\alpha}\right| = \frac{\left|\vec{M}\right|}{I} = \frac{1\ \text{N} \cdot \text{m}}{1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2} = 1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

   b) Determinamos el ángulo descrito por el disco a partir de la ecuación del MCUA y de aquí la longitud de la cuerda desenrollada:

$$\phi = \frac{1}{2}\alpha\ t^2 = \frac{1}{2} 1\ \text{rad}/\text{s}^2 \cdot (10\ \text{s})^2 = 50\ \text{rad}$$

$$l = R \cdot \phi = 0{,}5\ \text{m} \cdot 50\ \text{rad} = 25\ \text{m}$$