11 La teoría de la relatividad de Einstein

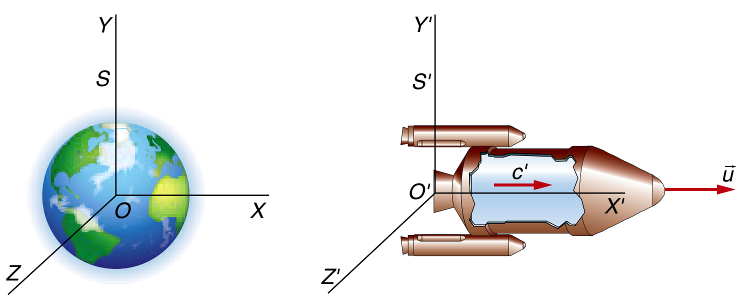
Actividades del interior de la unidad

1. Desde una nave que se mueve a 250 000 km/s se emite un rayo de luz en la dirección y sentido del movimiento. Calcula la velocidad del rayo para un observador en la Tierra utilizando la transformación de Galileo.

Si $\vec{u}$ es la velocidad de la nave (sistema S') respecto a la Tierra (sistema S) y c' es la velocidad del rayo de luz respecto a la nave, como se indica en la figura, de acuerdo con las transformaciones de Galileo para la velocidad, tendremos:

$$v = v' + u \rightarrow c = c' + u$$

$$c = 300\,000 \text{ km/s} + 250\,000 \text{ km/s} = 550\,000 \text{ km/s}$$

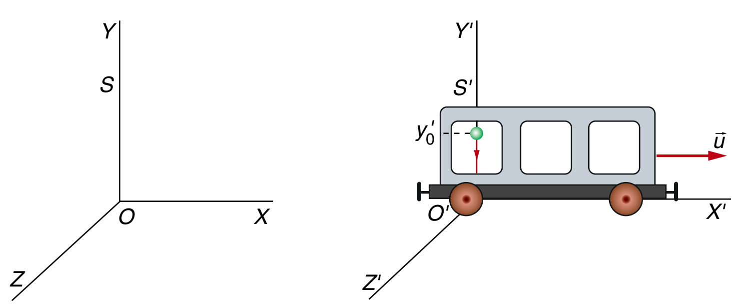


El resultado obtenido queda invalidado por el segundo postulado de la relatividad especial de Einstein

2. Un niño deja caer una manzana desde la ventanilla de un vagón que se mueve a 100 km/h. Escribe sus ecuaciones de movimiento y calcula su trayectoria, referidas al vagón y a un observador en el andén.

Respecto al sistema de referencia del vagón (S'), si la posición inicial era y'_0, tenemos, de acuerdo con la figura:

$$x' = 0 \;\; ; \;\; y' = y'_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$



Respecto al sistema fijo en el andén (S):

$$x = x' + u \cdot t = 0 + 27{,}78 \cdot t = 27{,}78 \cdot t \;\; ; \;\; y = y' = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

donde hemos supuesto que, en $t = 0$, $x = x'$ e $y = y'$, y hemos tenido en cuenta que u = 100 km/h = 27,78 m/s.

Si llamamos h a la altura desde la que se suelta la manzana, y sustituimos el valor de la aceleración de la gravedad, las ecuaciones de movimiento respecto al vagón, quedan:

$$x' = 0$$

$$y' = h - 4{,}9 \cdot t^2$$

Y respecto al andén:

$$x = 27{,}78 \cdot t$$

$$y = h - 4{,}9 \cdot t^2$$

Vemos que, respecto al vagón, la trayectoria es la recta $x' = 0$. Para hallar la trayectoria respecto al andén, despejamos t en la ecuación de x y sustituimos en la ecuación de y:

$$t = \frac{x}{27{,}78} \rightarrow y = h - 4{,}9 \cdot \frac{x^2}{771{,}6} = h - 6{,}35 \cdot 10^{-3} \cdot x^2$$

Es decir, la trayectoria respecto al andén es una parábola.

3. Comenta la afirmación siguiente: «Si en el interior de un barco se deja caer una piedra, su movimiento no se ve alterado por el del barco debido a que este va muy despacio».

Es una afirmación falsa, ya que, por el principio de relatividad de Galileo, el movimiento de la piedra no se verá afectado por el del barco siempre que este se mueva con velocidad constante, independientemente de su valor.

4. ¿A qué crees que se debe que los primeros en calcular medidas aceptables de la velocidad de la luz fueran los astrónomos?

Se debe a que, debido a la elevadísima velocidad de propagación de la luz, los intervalos de tiempo que emplea esta en sus recorridos solo eran lo suficientemente grandes como para ser medidos en la escala astronómica. En escalas del orden de las dimensiones de un laboratorio, los intervalos de tiempo son tan pequeños que no se disponía de aparatos tan precisos para apreciarlos.

5. ¿Por qué esperaban Michelson y Morley que el diagrama de interferencias variase al rotar 90° el interferómetro?

Porque desde el sistema de referencia del éter, el recorrido de la luz por el brazo perpendicular al desplazamiento de la Tierra sería más largo que el recorrido de la luz por el brazo alineado con el movimiento.

Si los brazos rotan 90°, aquel por el que el recorrido era más corto pasa ahora a tener el más largo, y viceversa. De ahí que la operación de rotación del interferómetro se esperaba que implicase una variación en el diagrama de interferencias, cosa que no sucedió.

6. Razona en qué circunstancias debería realizarse el experimento de Michelson-Morley para poder descartar que la Tierra arrastra al éter en su movimiento.

Sería de esperar que, si la Tierra arrastra al éter en su movimiento, no arrastraría a todo el éter del universo, sino solo al que se encuentra rodeándola. Por tal motivo, si el experimento se realiza a una altura considerable, parecería razonable pensar que estaría fuera del éter arrastrado por la Tierra. Sin embargo, Picard realizó el experimento en un globo a gran altitud y nuevamente obtuvo el mismo resultado: el diagrama de interferencias no se veía afectado por la orientación del interferómetro.

7. ¿A qué velocidad se debe mover una barra para que su longitud se reduzca a la mitad?

Como queremos que la longitud se reduzca a la mitad, $l = l_0/2$, se cumplirá:

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow \frac{l_0}{2} = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow v = 0{,}87 \cdot c$$

Es decir, la velocidad de la barra debe ser: $v = 260\,000$ km/s.

8. ¿Representa una novedad el hecho de que la velocidad de la luz no dependa de la velocidad del foco emisor?

No representa una novedad, pues es una propiedad de las ondas. Lo que sí es una novedad es que la velocidad de la luz no dependa del estado de movimiento del receptor.

9. Las coordenadas de un suceso en el interior de una nave que se desplaza con velocidad $v = 0{,}5 \cdot c$ son, respecto a ella (10, 0, 0, 100). Interprétalas y calcula las coordenadas del suceso respecto a tierra.

Estas coordenadas indican que el suceso ha ocurrido en el punto de coordenadas (10, 0, 0), referidas a S', y en el instante $t' = 100$ s, es decir, medido con el reloj que está en S':

$$(x', y', z', t') = (10, 0, 0, 100)$$

Para calcular las coordenadas del suceso respecto a Tierra (sistema S) aplicamos las transformaciones de Lorentz. En este caso, el valor de γ es:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}5 \cdot c}{c}\right)^2}} = 1{,}15$$

Por tanto:

$$x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t') = 1{,}15 \cdot (10 + 0{,}5 \cdot c \cdot 100) = 1{,}15 \cdot 50 \cdot c = 1{,}73 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

Donde hemos hecho uso de la aproximación $10 + 50 \cdot c \simeq 50 \cdot c$. Además:

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma \cdot \left(t' + \frac{v}{c^2} \cdot x'\right) = 1{,}15 \cdot \left(100 + \frac{0{,}5 \cdot c}{c^2} \cdot 10\right) \simeq 1{,}15 \cdot 100 \rightarrow t = 115 \text{ s}$$

Por tanto, las coordenadas del suceso respecto a Tierra, en el S.I., son:

$$(x, y, z, t) = (1{,}73 \cdot 10^{10}, 0, 0, 115)$$

10. En el interior de una nave que se desplaza a 280 000 km/s se celebra el primer cumpleaños de un niño que nació durante el viaje. ¿Qué edad tendrá respecto a la Tierra?

Como la nave se mueve a una velocidad próxima a la de la luz, el tiempo transcurrido, medido desde la Tierra (la edad del niño referida a la Tierra), será:

$$t = \gamma \cdot t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2,8 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} \cdot 1 = 2,79 \text{ años}$$

11. Obtén la contracción que experimentarán los lados de un cuadrado de 1 m de lado al desplazarse a 0,7 · *c*, si dos de ellos están alineados con su velocidad.

La longitud de los dos lados perpendiculares a la velocidad no varía, y la de los dos lados alineados con la velocidad sí lo hace. Por ejemplo, respecto a un sistema de referencia situado en la Tierra, será:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,7 \cdot c}{c}\right)^2} = 0,71 \text{ m}$$

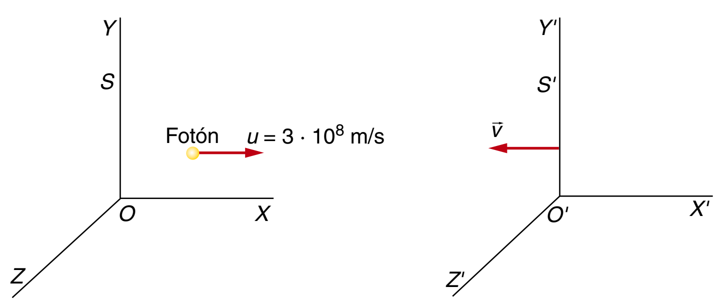
Por tanto, desde la Tierra veríamos un rectángulo de 1 m de alto por 0,71 m de largo.

12. Un foco supuesto en reposo emite un fotón. Calcula su velocidad respecto a un observador que se acerca a él a velocidad *v*. ¿Qué resultado se obtiene si utilizas las transformaciones de Galileo?

La velocidad del fotón en movimiento, medida desde el sistema de referencia S', también en movimiento, donde u' es la velocidad del fotón respecto a S', y $u = c$, respecto a S, es:

$$u' = \frac{u + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot c} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c + v}{\frac{c + v}{c}} = c$$

Como vemos, la velocidad del fotón es la misma medida respecto a cualquier observador en movimiento uniforme.



En el marco de las transformaciones de Galileo, se tendría simplemente:

$$u' = 3 \cdot 10^8 + v$$

Lo cual implica que la velocidad del fotón respecto al sistema S' sería mayor que 300 000 km/s, cosa que **no puede suceder** si utilizamos la composición relativista de velocidades.

13. Calcula la masa de un protón cuya velocidad es de 280 000 km/s, y compárala con su masa en reposo.

La masa en reposo del protón es $m_0 = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg, y en movimiento:

$$m = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1{,}673 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2{,}8 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = 2{,}79 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27} = 4{,}668 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

La relación entre ambas masas es, entonces:

$$\frac{m}{m_0} = \gamma = 2{,}79$$

14. Obtén la energía total del protón anterior, así como la que se le ha suministrado.

La energía total del protón en movimiento es:

$$E = m \cdot c^2 \rightarrow E = 4{,}668 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 4{,}201 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Su energía en reposo vale:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 \rightarrow E_0 = 1{,}673 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}506 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Por tanto, a ese protón se le ha suministrado una energía:

$$\Delta E = E - E_0 = 4{,}201 \cdot 10^{-10} - 1{,}506 \cdot 10^{-10} = 2{,}695 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

15. Calcula la cantidad de movimiento y la energía total de una partícula de 10^{-28} kg con una velocidad de 250 000 km/s.

Calculamos, en primer lugar, γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2{,}5 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = 1{,}81$$

La masa de la partícula en movimiento es:

$$m = \gamma \cdot m_0 = 1{,}81 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

Y su energía total:

$$E = m \cdot c^2 = 1{,}81 \cdot 10^{-28} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}629 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

Para hallar la cantidad de movimiento, calculamos, previamente, su energía en reposo:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 = 10^{-28} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Despejando en la expresión que relaciona la energía relativista con la cantidad de movimiento, resulta:

$$p^2 \cdot c^2 = E^2 - E_0^2 \rightarrow p = \sqrt{\frac{E^2 - E_0^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{(1{,}629 \cdot 10^{-11})^2 - (9 \cdot 10^{-12})^2}{(3 \cdot 10^8)^2}} =$$

$$= 4{,}53 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Se puede comprobar que habríamos llegado al mismo resultado usando directamente la expresión $p = \gamma \cdot m_0 \cdot v$.

16. En un reactor nuclear se transforman en energía 2 kg de uranio. Calcula la energía que se libera.

Si suponemos que la masa que se transforma íntegramente en energía está en reposo, bastará con obtener su equivalente en energía de acuerdo con la relación siguiente:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

Como la variación de masa es de 2 kg, Δm = 2 kg, tendremos:

$$\Delta E = 2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}8 \cdot 10^{17} \text{ J}$$

17. Calcula la fuerza que será necesario aplicar a un protón que se encuentra en reposo (m_0 = 1,67 · 10^{-27} kg) para suministrarle una aceleración de 1 m/s². ¿Y si se mueve a 0,7 · c?

Si el protón está en reposo, podemos utilizar la expresión clásica de la aceleración:

$$F = m \cdot a \;\rightarrow\; F = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 1 = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ N}$$

Sin embargo, si se mueve a una velocidad de 0,7 · c, tenemos que utilizar la expresión relativista:

$$F = m_0 \cdot \gamma^3 \cdot a$$

Donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}7 \cdot c}{c}\right)^2}} = 1{,}4$$

Así, la fuerza necesaria en este caso es:

$$F = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}4^3 \cdot 1 = 4{,}58 \cdot 10^{-27} \text{ N}$$

Se trata de una fuerza 2,74 veces más intensa que la necesaria cuando el protón está en reposo.

18. Comenta la afirmación siguiente: «En el futuro, la tecnología habrá avanzado tanto que se podrán construir naves que viajen a las estrellas a dos o tres veces la velocidad de la luz».

La afirmación es falsa, pues de acuerdo con la teoría de la relatividad especial es imposible que un objeto material viaje a una velocidad igual o superior a la de la luz. No se trata, por tanto, de un problema de tecnología.