5 MOVIMIENTO ONDULATORIO

5.1. EL MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. Indica cómo podemos comprobar que, cuando una onda se propaga por una cuerda, hay transporte de energía, pero no transporte de materia.

Un procedimiento sencillo puede ser dibujar marcas, a intervalos regulares, en la cuerda tensa. Se observa que, al sacudir transversalmente la cuerda, los puntos marcados oscilan alrededor de la posición de equilibrio, pero no se desplazan en la dirección de propagación de la onda.

2. Cita cuatro movimientos, al menos, que se produzcan en la naturaleza y sean de tipo ondulatorio. Clasifica cada uno de dichos movimientos según los criterios indicados en el epígrafe.

Algunos ejemplos de movimientos, clasificados en función de la dirección de propagación, son los siguientes:

- Unidimensionales: la vibración de una cuerda de guitarra al pulsarla o la de un muelle que describe un m.a.s.
- Bidimensionales: las ondas que se crean en la superficie de un vaso cuando golpeamos el vidrio con el dedo, las que se generan en el tímpano o en un tambor y las que se generan en una cubeta de ondas.
- Tridimensionales: la propagación de ondas de radio en el aire al ser emitidas por una antena; el sonido emitido por un instrumento musical cuando se propaga por el aire o la propagación de la luz en el vacío.

En función de la forma en que se transmite la perturbación, las ondas anteriores se clasifican como se muestra en la siguiente tabla:

Onda longitudinal	Onda transversal
Sonido emitido por un instrumento musical.	Vibración de una cuerda de guitarra.
Vibración de un muelle que describe un m.a.s.	Propagación de ondas de radio en el aire.
	Propagación de la luz en el vacío.
	Ondas en la superficie de un vaso.
	Cubeta de ondas.
	Ondas en el tímpano o en un tambor.

La naturaleza de estas ondas es mecánica, excepto la que corresponde a la propagación de las ondas de radio en el aire y a la luz en el vacío, que es electromagnética.

3. El sonido y la luz son dos ejemplos de propagación ondulatoria. ¿Qué semejanzas y qué diferencias existen entre estos dos tipos de onda?

Las semejanzas y las diferencias son las que se indican a continuación:

Semejanzas

- Ambas son ondas tridimensionales; se propagan en las tres direcciones del espacio.
- Ambas pueden ser planas o esféricas, dependiendo de la distancia a la que nos encontremos del foco.

Diferencias

- El sonido es una onda de naturaleza mecánica: solo se propaga por un medio material. En cambio, la luz es una onda no mecánica, que también se propaga por el vacío. Prueba de ello es que somos capaces de observar las estrellas.
- La luz se propaga mediante ondas transversales. En cambio, el sonido se propaga mediante ondas longitudinales.

5.2. MAGNITUDES DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. Determina la ecuación de dimensiones que corresponde a la frecuencia.

Por su definición, la frecuencia es la inversa del período, el cual se mide en segundos. Por tanto:

$$[f] = \left[\frac{1}{T}\right] = \frac{1}{\mathrm{T}} = \mathrm{T}^{-1}$$

2. Una onda se propaga por una cuerda con una velocidad de 40 m · s^{-1} y cada onda completa ocupa 25 cm. Calcula:

a) La frecuencia de la oscilación.

b) La longitud de onda que corresponderá al movimiento ondulatorio si la onda pasa a otra cuerda, unida a la primera, en la que la velocidad de propagación es la mitad.

a) Si tenemos en cuenta la relación entre la velocidad de propagación, la longitud de onda y la frecuencia:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

Y de acuerdo con los datos que proporciona el enunciado obtenemos, al sustituir:

$$f = \frac{40}{0{,}25} = 160 \text{ Hz}$$

b) Como se explica en el ejemplo de este epígrafe en el libro del alumno, la frecuencia es una magnitud propia del movimiento ondulatorio y es independiente de las características del medio. Por tanto, si la onda pasa a otra cuerda en la que la velocidad de propagación es la mitad (20 m · s^{-1}), la longitud de onda del movimiento ondulatorio será:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{20}{160} = 0{,}125 \text{ m}$$

3. La longitud de onda de los sonidos que podemos percibir oscila entre 1,7 cm y 17 m. Calcula la frecuencias que corresponde a cada una de estas longitudes de onda, si la velocidad de propagación del sonido en el aire es, aproximadamente, 340 m · s^{-1}.

Si tenemos en cuenta la relación entre la frecuencia, la velocidad de propagación y la longitud de onda del movimiento ondulatorio:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

La frecuencia que corresponde a un sonido de longitud de onda 1,7 cm es:

$$\lambda_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{340}{1{,}7 \cdot 10^{-2}} = 20\,000 \text{ Hz}$$

Y la que corresponde al sonido de 17 m de longitud de onda:

$$\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{340}{17} = 20 \text{ Hz}$$

Por tanto, el intervalo de frecuencias de ondas sonoras audibles por un oído humano sano oscila entre 20 Hz y 20 000 Hz. Sobre esto profundizaremos en la unidad 6, cuando estudiemos la propagación del sonido.

4. Las frecuencias que corresponden a las ondas que forman la zona visible del espectro oscilan entre 7,9 · 10^{14} Hz (violeta) y 4,0 · 10^{14} Hz (rojo). Calcula el correspondiente intervalo de longitudes de onda. Recuerda que estas ondas se mueven a la velocidad de la luz.

A partir de la expresión que relaciona la longitud de onda con la frecuencia y la velocidad de propagación:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Se obtiene, teniendo en cuenta que las ondas electromagnéticas se propagan a la velocidad de la luz ($c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}):

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{7{,}9 \cdot 10^{14}} = 3{,}80 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{4{,}0 \cdot 10^{14}} = 7{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

5.3. ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. **Expresa la velocidad de propagación de la onda en función de la frecuencia angular y del número de onda.**

   La velocidad de propagación de la onda se expresa, en función del período y la frecuencia, como se indica:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

   Teniendo en cuenta la relación entre la frecuencia angular, la frecuencia y el período, se obtiene:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \; ; f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

   Por tanto:

$$v = \frac{\lambda \cdot \omega}{2 \cdot \pi}$$

   El número de onda es el número de longitudes de onda que contiene una longitud $2 \cdot \pi$:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

   La velocidad de propagación en función del número de onda es:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

2. **De una onda que viaja por una cuerda, se conocen los siguientes datos: $A = 3$ cm; $v = 5$ m · s^{-1}; $f = 20$ Hz.**

   Escribe la ecuación de la onda en función de la posición y del tiempo: $y = f(x, t)$.

   La ecuación de propagación de una onda unidimensional se puede escribir como sigue:

$$y\ (x, t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

   En el caso que nos ocupa:

$$A = 3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 20 = 40 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20}{5} = 8 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$$

   Por tanto:

$$y\ (x, t) = 3 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ (40 \cdot \pi \cdot t - 8 \cdot \pi \cdot x) = 3 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ [8 \cdot \pi \cdot (5 \cdot t - x)]$$

   En la expresión anterior, x e y se miden en metros si t se mide en segundos.

3. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es:

$$y = 0{,}02 \cdot sen\,[\pi \cdot (50 \cdot t - 2 \cdot x)]$$

En esta expresión, *x* e *y* se miden en metros si *t* se mide en segundos. Calcula la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda, así como su frecuencia de vibración.

Si comparamos la ecuación de la onda que propone el enunciado:

$$y = 0{,}02 \cdot sen\,(50 \cdot \pi \cdot t - 2 \cdot \pi \cdot x)$$

con la ecuación general del movimiento ondulatorio unidimensional:

$$y\,(x, t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

e identificamos términos, se obtiene:

$$A = 0{,}02 \text{ m} \quad ; \quad \omega = 50 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad ; \quad k = 2 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$$

Teniendo en cuenta la definición de número de onda, podemos calcular la longitud de onda:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1 \text{ m}$$

Por su parte, el período y la frecuencia de vibración del movimiento son:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{50 \cdot \pi} = 0{,}04 \text{ s} \; ; f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}04} = 25 \text{ Hz}$$

Y la velocidad de propagación:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 1 \cdot 25 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. Indica cuál de las expresiones siguientes representa la ecuación de una onda transversal que se propaga en sentido positivo por el eje de abscisas con una velocidad de 5 m/s, tiene una amplitud de 1 m y una frecuencia de 10 Hz:

a) $y = cos\,[2 \cdot \pi\,(10 \cdot t - 5 \cdot x)]$

b) $y = cos\,[2 \cdot \pi\,(10 \cdot t + x)]$

c) $y = cos\,[4 \cdot \pi\,(5 \cdot t - x)]$

El sistema de referencia elegido para expresar las ecuaciones de onda del enunciado se ha tomado de tal modo que la vibración asociada al movimiento se propague en la dirección del eje *Y*, y la propagación, en la dirección del eje *X*. Cuando $x = 0$ y $t = 0$ (origen), el valor de la elongación es de 1 m.

La ecuación general de este movimiento ondulatorio es:

$$y\,(x, t) = A \cdot cos\,(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

El factor $(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$ se denomina fase del movimiento ondulatorio. El símbolo ± indica la posibilidad de que la perturbación se propague por el eje de abscisas en sentido positivo (signo –) o negativo (signo +). En el enunciado se indica que la onda se propaga en el sentido positivo del eje de abscisas; por tanto, la fase debe llevar signo negativo, con lo que la opción b) queda descartada.

Las ondas a) y c) tienen una amplitud de 1 m. La frecuencia angular que les corresponde es:

$$\omega_a = 2 \cdot \pi \cdot 10 = 20 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_c = 4 \cdot \pi \cdot 5 = 20 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Y su frecuencia de vibración es:

$$\omega_a = 2 \cdot \pi \cdot f_a \rightarrow f_a = \frac{\omega_a}{2 \cdot \pi} = \frac{20 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 10 \text{ Hz}$$

$$\omega_c = 2 \cdot \pi \cdot f_c \rightarrow f_c = \frac{\omega_c}{2 \cdot \pi} = \frac{20 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 10 \text{ Hz}$$

Para calcular la velocidad de propagación que les corresponde:

$$v = \lambda \cdot f$$

hemos de calcular primero la longitud de onda de cada una, que podemos obtener a partir del número de onda, *k*:

$$k_a = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_a} \rightarrow \lambda_a = \frac{2 \cdot \pi}{k_a} = \frac{2 \cdot \pi}{5 \cdot 2 \cdot \pi} = \frac{1}{5} \text{ m}^{-1}$$

$$k_c = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_c} \rightarrow \lambda_c = \frac{2 \cdot \pi}{k_c} = \frac{2 \cdot \pi}{4 \cdot \pi} = \frac{1}{2} \text{ m}^{-1}$$

Por tanto, la velocidad de propagación es:

$$v_a = \lambda_a \cdot f_a = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_c = \lambda_c \cdot f_c = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La ecuación que representa una onda con las características descritas por el enunciado es la **c).**

5. Dada la ecuación de onda:

$$\boldsymbol{y\,(x,\,t) = 0{,}04 \cdot sen\,[\pi \cdot (x - t)]}$$

Calcula la distancia que separa dos puntos que se encuentren en fase y la que separa otros dos que se encuentren en oposición de fase.

Dos puntos consecutivos están en fase si, en un instante dado, su diferencia de fase, $\Delta\varphi$, es $2 \cdot \pi$ radianes. Por tanto:

$$\Delta\varphi = \pi \cdot [(x - t) - (x' - t)] = 2 \cdot \pi \rightarrow x - x' = 2 \text{ m}$$

Dos puntos consecutivos se encuentran en oposición de fase si, en un instante dado, su diferencia de fase es π radianes. Por tanto:

$$\Delta\varphi = \pi \cdot [(x - t) - (x' - t)] = \pi \rightarrow x - x' = 1 \text{ m}$$

5.4. ENERGÍA E INTENSIDAD DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. Calcula el coeficiente de absorción de un material que, con un espesor de 20 cm, reduce a la décima parte la intensidad de una onda sonora.

El coeficiente de absorción, β, de un material podemos calcularlo a partir de la expresión:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Sabemos que, tras pasar por un material cuyo espesor es 20 cm, la relación entre las intensidades de entrada y de salida es: $I = 0{,}1 \cdot I_0$. Por tanto:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x} \rightarrow \beta = \frac{ln\left(\frac{I}{I_0}\right)}{-x} = \frac{ln\left(\frac{0{,}1 \cdot I_0}{I_0}\right)}{-0{,}2} = -\frac{ln 0{,}1}{0{,}2} = 11{,}51 \text{ m}^{-1}$$

2. Un foco emite ondas amortiguadas, cuya amplitud viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{A = \frac{A_0}{x \cdot e^{-\beta \cdot x}}}$$

En esta expresión, β es el coeficiente de absorción del medio por el que las ondas se propagan, siendo su valor 0,1 m^{-1}.

Si a una distancia de 5 m del foco la amplitud del movimiento de las partículas que vibran es 0,3 mm, calcula la amplitud del movimiento ondulatorio que describen las partículas que se encuentran a una distancia de 20 m del foco.

Con los datos que proporciona el enunciado de la actividad podemos calcular la amplitud inicial del movimiento ondulatorio, A_0.

$$A = \frac{A_0}{x \cdot e^{-\beta \cdot x}} \rightarrow A_0 = A \cdot x \cdot e^{-\beta \cdot x} = 0{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 5} = 9{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0{,}91 \text{ mm}$$

A una distancia de 20 m del foco, la amplitud del movimiento de las partículas será:

$$A = \frac{A_0}{x \cdot e^{-\beta \cdot x}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-4}}{20 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20}} = 3{,}36 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

5.5. SUPERPOSICIÓN DE ONDAS. INTERFERENCIAS

1. Dos ondas de la misma f, λ y A se mueven en la misma dirección y sentido. Calcula la amplitud de la onda resultante, sabiendo que la amplitud de las ondas es 0,4 cm y su diferencia de fase, es $\pi/2$ radianes.

La expresión que proporciona la amplitud de la onda resultante es:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot cos\,(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

La amplitud de ambas ondas es la misma, $A_1 = A_2 = A_0$; por tanto:

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_0^2 + 2 \cdot A_0^2 \cdot cos\ (\varphi_1 - \varphi_2)} = \sqrt{2 \cdot A_0^2 \cdot \left[1 + cos\ (\varphi_1 - \varphi_2)\right]}$$

Sustituyendo los datos que proporciona el enunciado se obtiene:

$$A = \sqrt{2 \cdot 0,4^2 \cdot (1 + cos\ \pi/2)} = \sqrt{2 \cdot 0,4^2} = 0,57 \text{ cm}$$

2. Dos focos sonoros emiten ondas de la misma frecuencia, 100 Hz, y amplitud, 4 cm. Las distancias a un punto *P* son, respectivamente, $x_1 = 100$ m y $x_2 = 103,4$ m. Si v_{sonido} (aire) = 340 m · s^{-1}, calcula:

a) La ecuación de la onda que produce en el punto *P* cada foco por separado.

b) La ecuación de la onda resultante de la interferencia en dicho punto.

a) Las magnitudes características de estos movimientos ondulatorios son:

$f = 100 \text{ Hz} \rightarrow \omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 100 = 200 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$A = 4 \text{ cm} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{100} = 0,01 \text{ s}$

$v = \dfrac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = v \cdot T = 340 \cdot 0,01 = 3,4 \text{ m}$

$k = \dfrac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \dfrac{2 \cdot \pi}{3,4} = 0,59 \cdot \pi$

Si tenemos en cuenta la ecuación general del movimiento ondulatorio unidimensional:

$$\chi\ (x,\ t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Obtenemos, para cada onda:

$$\chi_1\ (100,\ t) = 4 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ (200 \cdot \pi \cdot t - 0,59 \cdot \pi \cdot 100) =$$

$$= 4 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ [\pi \cdot (200 \cdot t - 59)] = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi_1)$$

$$\chi_2\ (103,4,\ t) = 4 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ (200 \cdot \pi \cdot t - 0,59 \cdot \pi \cdot 103,4) =$$

$$= 4 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ [\pi \cdot (200 \cdot t - 61)] = A \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi_2)$$

En estas ecuaciones, x se mide en metros si t se expresa en segundos.

b) De acuerdo con el principio de superposición, el movimiento resultante de los dos movimientos anteriores es su suma:

$$\chi = \chi_1 + \chi_2$$

El resultado que se obtiene es otro movimiento ondulatorio armónico:

$$\chi = A_R \cdot sen\ (\omega \cdot t + \varphi_0)$$

donde:

$$A_R = \sqrt{A^2 + A^2 + 2 \cdot A^2 \cdot cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \sqrt{2 \cdot A^2 \cdot 1 + \left[cos\ (\varphi_1 - \varphi_2)\right]} =$$
$$= \sqrt{2 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 \cdot [1 + cos\ (-59 \cdot \pi + 61 \cdot \pi)]} = 0,08\ \text{m}$$
$$\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2 = -59 \cdot \pi + 61 \cdot \pi = 2 \cdot \pi$$

Por tanto, la ecuación de la onda resultante de la interferencia en el punto P es:

$$\chi = 0{,}08 \cdot sen\ (200 \cdot \pi \cdot t + 2 \cdot \pi) = 0{,}8 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ [2 \cdot \pi \cdot (100 \cdot t + 1)]$$

5.6. ONDAS ESTACIONARIAS

1. Calcula la distancia que separa dos vientres consecutivos de una onda armónica.

La condición que cumplen los vientres de la onda es:

$$x = n \cdot \frac{\lambda}{2}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, la distancia que separa dos vientres consecutivos es:

$$x_2 - x_1 = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} - 1 \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

2. Calcula la distancia que separa dos nodos consecutivos de una onda armónica.

La condición que cumplen los nodos de la onda es:

$$x = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, la distancia que separa dos nodos consecutivos es:

$$x_2 - x_1 = (2 \cdot 2 + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} - (2 \cdot 1 + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} = (5 - 3) \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

3. En una onda armónica, calcula la distancia que separa un nodo del vientre que le antecede o que le precede.

Como hemos visto en las dos actividades anteriores, la distancia entre dos nodos o entre dos vientres es $\lambda/2$. Por tanto, la distancia entre un nodo y un vientre es la mitad, $\lambda/4$.

Fíjate en las figuras y fotografías de la página 123 del libro.

4. A la vista de los resultados de las tres actividades anteriores, ¿qué conclusiones se pueden obtener?

Además de los resultados obtenidos en dichas actividades, la conclusión más importante que se obtiene es que la longitud de onda no puede tomar cualquier valor. Es una magnitud cuantizada, cuyo valor viene determinado por el de n.

5.7. DIFRACCIÓN

1. **¿Qué significa la expresión "propagación no rectilínea del rayo"?**

   La expresión alude al fenómeno físico de la difracción, que se produce cuando en la propagación de una onda se interpone un obstáculo o una rendija de tamaño comparable a su longitud de onda.

   Este fenómeno no se puede explicar considerando la propagación rectilínea del movimiento ondulatorio, pero sí al tener en cuenta el principio de Huygens, según el cual cada punto del medio alcanzado por el movimiento ondulatorio se convierte a su vez en foco emisor.

2. **Investiga qué significa la expresión "difracción de electrones".**

   La difracción de electrones demuestra el comportamiento ondulatorio de las partículas materiales; en este caso, de los electrones.

   Esta experiencia fue realizada en 1927 por Davisson y Germer, que dispersaron electrones en la superficie de un cristal metálico, como si se tratase de ondas electromagnéticas.

5.8. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

1. **Comprueba el cambio de fase que se produce en la reflexión. Utiliza para ello un muelle o una cuerda fijos por un extremo y haz que viaje por él un pulso de onda.**

2. **Comprueba el fenómeno de la refracción experimentalmente y de forma cualitativa. Utiliza para ello dos cuerdas unidas, una ligera y otra más pesada, por las que viaja un pulso de onda.**

   Ambas actividades son experiencias prácticas cuya realización recomendamos en el aula.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. **Responde verdadero o falso a las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:**

   a) En un movimiento ondulatorio, el número de onda equivale a la frecuencia.

   b) Cuando un pulso de onda, que se mueve por una cuerda fija por un extremo, llega a ese extremo, puede reflejarse y/o invertirse.

   c) Cada partícula de una cuerda por la que se propaga un tren de ondas realiza un movimiento vibratorio armónico.

a) **Falsa.** La frecuencia, f, es el número de oscilaciones que se producen en un segundo. Por su parte, el número de onda, k, es el número de longitudes de onda que contiene una longitud $2 \cdot \pi$.

b) **Falsa.** Cuando un pulso de onda que se mueve por una cuerda que tiene un extremo fijo, alcanza ese extremo, se refleja e invierte. De ese modo se genera el pulso reflejado, que saldrá invertido respecto al pulso incidente.

c) **Verdadera.** Cada partícula de la cuerda alcanzada por la perturbación vibra alrededor de su posición de equilibrio, reproduciendo la vibración original del punto inicialmente perturbado.

2. Haz una clasificación de los movimientos ondulatorios atendiendo a los siguientes criterios:

a) Necesidad o no de medio material para propagarse.

b) Relación entre las direcciones de propagación y de vibración de las partículas del medio.

c) Forma del frente de onda.

Pon ejemplos aclaratorios en cada supuesto.

a) Atendiendo a su naturaleza, las ondas pueden ser mecánicas o electromagnéticas. Las primeras, como el sonido o la perturbación que se transmite por una cuerda, necesitan un medio material para propagarse; las segundas, por el contrario, no lo necesitan; es el caso, por ejemplo, de la propagación de la luz, que es una onda electromagnética.

b) Según la forma en que se transmite la perturbación, las ondas se clasifican en:

- Longitudinales, si la dirección de propagación coincide con la dirección de vibración de las partículas del medio. Es lo que ocurre, por ejemplo, con el sonido.

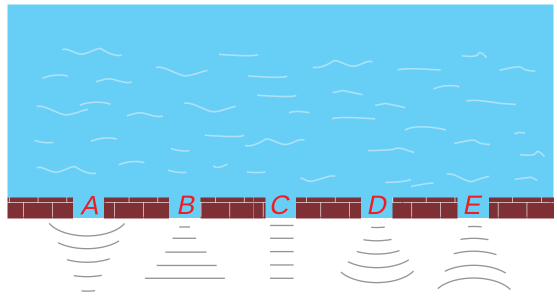
- Transversales, si la dirección de propagación es perpendicular a la dirección de vibración. Las ondas electromagnéticas son transversales, al igual que las que se propagan por una cuerda.

c) Según la dirección de propagación, las ondas se clasifican en unidimensionales, como las que se propagan por una cuerda tensa; bidimensionales, como las que se propagan por la superficie de un estanque, y tridimensionales, como las ondas sonoras propagándose en el aire.

En las primeras, el frente de onda es un punto; en las segundas, una circunferencia o una línea recta (a una cierta distancia de la perturbación el frente de onda se puede considerar prácticamente lineal), y en las terceras, el frente de onda es una esfera (en puntos lejanos la curvatura disminuye, por lo que el frente de onda se puede considerar plano).

NOTA: Recomendamos la realización de experiencias en la cubeta de ondas, donde se pueden generar y visualizar distintos tipos de fenómenos asociados a ellas.

3. Un frente de olas planas llega al muro de un puerto y pasa a través de él. ¿Qué figura muestra mejor la evolución de las olas?



Estamos ante un caso de difracción. La difracción se produce cuando un obstáculo impide el avance de parte de un frente de onda. Si la longitud de onda de la perturbación es comparable con el tamaño del obstáculo, los puntos del frente de onda que no chocan con el obstáculo se convierten, de acuerdo con el principio de Huygens, en centros emisores de nuevos frentes de ondas. De ese modo, se genera un frente de ondas esféricas, con centro en la parte libre del obstáculo, que explica que la onda se propague por detrás de él.

La respuesta correcta es, por tanto, **D,** a no ser que la abertura sea mucho mayor que la longitud de onda de la vibración, en cuyo caso la respuesta correcta sería **C.**

4. Cuando la luz pasa de un medio a otro, se modifica su velocidad y su longitud de onda. ¿Se modifica también su frecuencia?

No. La frecuencia es una magnitud propia del movimiento ondulatorio y es independiente de las características del medio.

5. Al alejarnos de un foco puntual emisor de ondas esféricas, la intensidad de dicha onda va disminuyendo. ¿Quiere esto decir que no se cumple el principio de conservación de la energía?

La intensidad de una onda es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a que nos encontramos del foco. La onda no se propaga indefinidamente, ya que a una distancia suficientemente alejada del foco llega tan debilitada que puede resultar inapreciable. Este fenómeno se denomina atenuación de la onda, cuya energía, en el caso de una onda esférica, ha de repartirse en superficies cada vez más grandes a medida que nos alejamos del foco.

Además de este fenómeno, existe otro, la absorción, por el que parte de la energía que transporta la onda es absorbida por el medio material por el que se propaga, debido al rozamiento.

Estos dos fenómenos, atenuación y absorción, explican por qué la intensidad de la onda va disminuyendo a medida que nos alejamos del foco emisor. Por tanto, sí se cumple el principio de conservación de la energía.

6. ¿Qué es la intensidad de un movimiento ondulatorio? ¿Cómo depende de la amplitud?

La intensidad de una onda es la relación entre la potencia que propaga la onda y la superficie perpendicular a la dirección de propagación de esta:

$$I = \frac{P}{S}$$

Para cualquier tipo de onda:

$$I = \frac{cte \cdot \omega^2 \cdot A^2}{S}$$

Por tanto, la intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, A, y al cuadrado de la frecuencia angular, ω.

7. ¿Cómo varían con la distancia al foco la intensidad y la amplitud de las ondas esféricas?

La intensidad de una onda es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a que nos encontramos del foco:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Por su parte, la amplitud de la onda es inversamente proporcional a la distancia al foco:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

8. Explica brevemente en qué consisten los fenómenos de atenuación y de absorción de una onda.

Consúltese la cuestión 5 o las páginas 115 y 116 del libro del alumno.

9. Explica qué son las interferencias entre dos frentes de onda. ¿Por qué no hay interferencias entre los dos haces de luz procedentes de los faros de un coche?

La interferencia de ondas es la acción simultánea, sobre una partícula, de dos o más movimientos ondulatorios.

En el caso de los haces de luz que proceden de los faros de un coche no se producen interferencias, ya que la diferencia de fase entre los dos haces no es constante, sino que depende del tiempo; decimos en este caso que las fuentes son incoherentes.

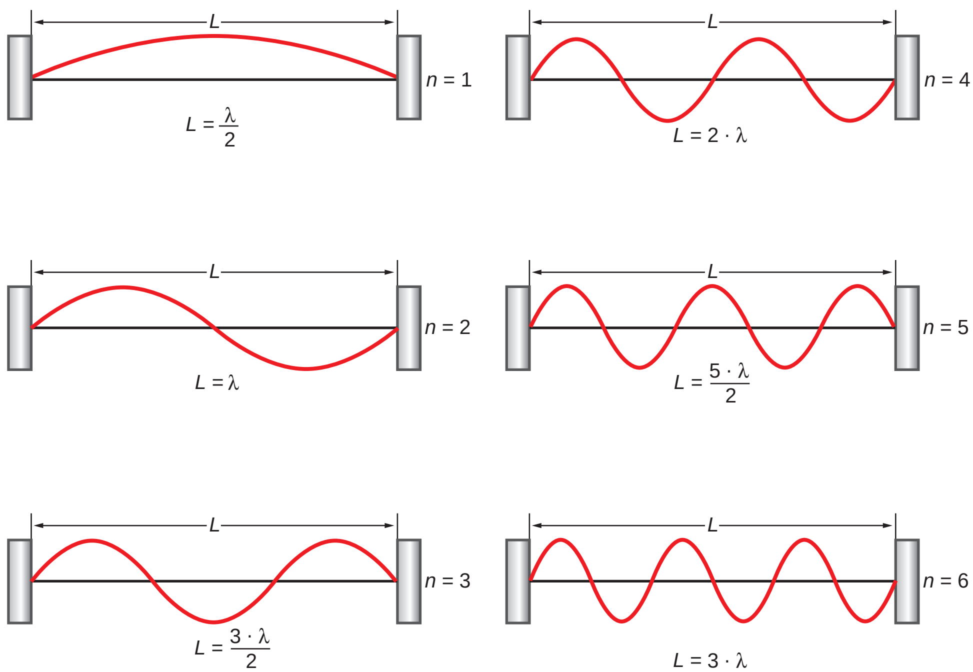
10. ¿Qué diferencia existe entre una onda viajera y una onda estacionaria?

Una onda estacionaria, a diferencia de una onda viajera, no propaga energía. En ella existen puntos que no vibran (nodos), otros que vibran con la amplitud máxima (vientres) y otros que vibran con amplitudes intermedias. En una onda viajera todos los puntos vibran del mismo modo.

11. Dibuja las seis primeras ondas estacionarias producidas en una cuerda, fija por ambos extremos, de longitud *L*. A la vista de las gráficas, deduce la relación que ha de existir entre la longitud de la cuerda y la longitud de onda del

movimiento ondulatorio que se propaga por ella para que se produzcan ondas estacionarias.

Las gráficas que solicita el enunciado de la cuestión son las que se muestran:



A partir de ellas se puede deducir que la expresión que relaciona la longitud de la cuerda con la longitud de onda de las ondas estacionarias que se generan en ella es:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot L}{n} \; (n = 1, 2, 3...)$$

12. Enuncia el principio de Huygens. Utilízalo para explicar el fenómeno de la difracción de una onda a través de una rendija de longitud *d*. Acompaña la explicación de algún dibujo.

La difracción es el fenómeno de propagación no rectilínea de un rayo, que se produce cuando en la propagación de una onda se interpone un obstáculo (rendija) de tamaño comparable a su longitud de onda, λ, y se manifiesta porque el rayo no se propaga rectilíneamente.

Este fenómeno no se puede explicar considerando la propagación rectilínea del movimiento ondulatorio, pero sí al tener en cuenta el principio de Huygens, según el cual cada punto del medio alcanzado por el movimiento ondulatorio se convierte a su vez en foco emisor.

Como documentación gráfica, consúltense las imágenes incluidas en la página 125 del libro del alumno.

13. Explica qué se entiende por difracción y en qué condiciones se produce.

Consúltese la respuesta a la actividad anterior.

14. Explica los fenómenos de reflexión y de refracción de una onda, y las leyes que los rigen. De las siguientes magnitudes, v, λ, f y T, indica cuáles varían y cuáles no.

La reflexión es el fenómeno que se produce cuando una onda que avanza por un medio incide sobre la superficie que lo separa de otro medio de propiedades elásticas distintas. Como consecuencia de ello, se produce un cambio en la dirección y sentido de propagación. Las leyes que rigen este fenómeno físico, denominadas leyes de Snell para la reflexión, son las siguientes:

- El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado están en el mismo plano.
- Los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales.

La refracción es el cambio de dirección que experimenta una onda que se propaga por un medio cuando pasa a otro medio en el que su velocidad de propagación es diferente. La ley de Snell para la refracción es la siguiente:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}}$$

En ella, $\hat{i}$ es el ángulo de incidencia; $\hat{r}$, el de refracción, y v_1 y v_2, la velocidad de propagación de la onda en cada medio.

Al producirse cualquiera de estos fenómenos, la frecuencia, f, no varía, ya que esta es una magnitud propia del movimiento ondulatorio.

El período, al ser la inversa de la frecuencia, tampoco varía:

$$T = \frac{1}{f}$$

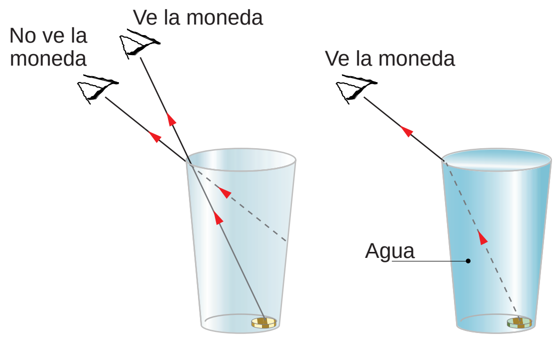
En la refracción se modifica la velocidad de propagación, ya que esta depende del medio por el que se propague el movimiento ondulatorio. La velocidad de propagación se relaciona con el período y la frecuencia mediante la longitud de onda:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Como la velocidad de propagación varía en la refracción y tanto la frecuencia como el período no lo hacen, la longitud de onda sí varía, de manera directamente proporcional a la velocidad de propagación.

15. Introducimos una moneda en un vaso y ajustamos nuestro ojo para verla enrasada exactamente. Hecho esto, bajamos la posición de nuestra cabeza hasta que la moneda deja de ser visible. Sin desplazar ahora la mirada, hacemos que alguien llene el vaso con agua. Al hacerlo, vemos de nuevo la moneda. ¿Puedes explicar el motivo de que ocurra esto?

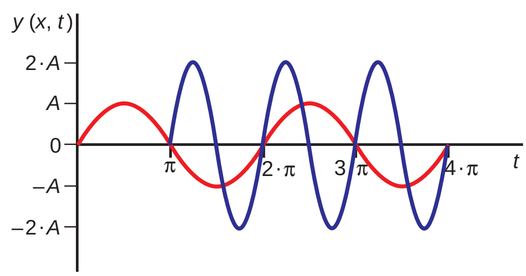
Que esto sea posible se debe al fenómeno de la refracción. Si llenamos el vaso de agua, el rayo de luz que, procedente de la moneda, llega al borde del vaso, en la superficie de separación agua-aire, cambia de dirección, alejándose de la normal, como se aprecia en la figura de la página siguiente. Este cambio de dirección hace posible que veamos la moneda.



EJERCICIOS

16. Dibuja en una misma gráfica dos ondas, de manera que una tenga doble amplitud que la primera, su frecuencia sea doble que la de la otra y presente un desfase de π radianes respecto a la primera.

La gráfica que solicita el enunciado del ejercicio es la siguiente:



17. La frecuencia de una nota musical es 440 Hz. Calcula la longitud de onda de su sonido cuando se propaga en el aire ($v = 340$ m/s) y cuando lo hace en el agua ($v = 1440$ m/s).

La expresión que relaciona la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación es:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Teniendo en cuenta que la frecuencia no varía cuando el movimiento ondulatorio cambia de medio, se obtienen los siguientes resultados:

$$\lambda_{aire} = \frac{v_{aire}}{f} = \frac{340}{440} = 0{,}77 \text{ m}$$

$$\lambda_{agua} = \frac{v_{agua}}{f} = \frac{1\,440}{440} = 3{,}27 \text{ m}$$

18. Dos ondas tienen la misma amplitud, siendo sus frecuencias respectivas 256 y 512 Hz. ¿Cuál posee mayor intensidad?

La intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, A, y al cuadrado de la frecuencia angular, ω. Como la amplitud de las ondas que describe el enunciado es la misma, poseerá más intensidad la onda de mayor frecuencia (512 Hz), ya que la frecuencia de vibración es directamente proporcional a la frecuencia angular:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

19. Por una cuerda tensa se transmiten simultáneamente dos ondas transversales cuyas ecuaciones, utilizando unidades S.I., son:

$$\boldsymbol{y\ (x,\ t) = 0{,}04 \cdot sen\ (10 \cdot x - 600 \cdot t)}$$

$$\boldsymbol{y\ (x,\ t) = 0{,}04 \cdot sen\ (10 \cdot x + 600 \cdot t)}$$

Escribe la ecuación de la perturbación resultante que aparecerá en la cuerda.

Si comparamos las ecuaciones del enunciado con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y\ (x,\ t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Y realizando algunas sencillas operaciones, podemos determinar las magnitudes características de las ondas que interfieren:

$$A_1 = A_2 = A = 0{,}04 \text{ m}$$

$$k_1 = k_2 = k = 10 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{10} = 0{,}2 \cdot \pi \text{ m}$$

$$\omega = 600 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad ; \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f_1 = f_2 = f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{600}{2 \cdot \pi} = \frac{300}{\pi} \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow T_1 = T_2 = T = \frac{1}{300/\pi} = \frac{\pi}{300} \text{ s}$$

Las ondas que interfieren tienen la misma amplitud, frecuencia, longitud de onda y naturaleza, y se propagan en la misma dirección y sentidos opuestos. Por tanto, el resultado de la interferencia es una onda estacionaria.

Para sumarlas hay que tener en cuenta la siguiente relación trigonométrica:

$$sen\ \alpha + sen\ \beta = 2 \cdot sen\ \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\ \frac{\alpha - \beta}{2}$$

La ecuación de la perturbación producida por las ondas que interfieren es:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot 0{,}04\ sen\ \frac{10 \cdot x - 600 \cdot t + 10 \cdot x + 600 \cdot t}{2} \cdot$$

$$\cdot\ cos\ \frac{10 \cdot x - 600 \cdot t - 10 \cdot x - 600 \cdot t}{2} = 0{,}02\ sen\ (10 \cdot x)\ cos\ (-600 \cdot t) =$$

$$= A_R \cdot cos\ (-600 \cdot t) = A_R \cdot cos\ (600 \cdot \text{t})$$

En la expresión anterior, $A_R = 0{,}08\ sen \cdot (10 \cdot x)$ es la amplitud de la onda estacionaria, cuyo valor varía entre 0 (en los nodos) y 0,08 (en los vientres).

20. Una onda armónica se propaga en dirección *OX* y sentido positivo. Dicha onda tiene las siguientes características:

$$\boldsymbol{A = 25 \text{ cm} \ ; \ v_{propagación} = 2 \text{ m/s} \ ; \ k = 2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Escribe la ecuación que corresponde al movimiento ondulatorio.

La ecuación general de onda podemos escribirla en la forma:

$$y(x,t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

El número de onda permite calcular la longitud de onda:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1 \text{ m}$$

Conocida la velocidad de propagación, podemos calcular la frecuencia y la frecuencia angular:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2}{1} = 2 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4 \cdot \pi \ \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

De ese modo, la ecuación de onda queda en la forma:

$$y(x,t) = 0{,}25 \cdot sen(4 \cdot \pi \cdot t - 2 \cdot \pi \cdot x) = 0{,}25 \cdot sen\ [2 \cdot \pi\ (2 \cdot t - x)]$$

21. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es:

$$\boldsymbol{y\ (x,\ t) = 8 \cdot sen\ [\pi \cdot (100 \cdot t - 8 \cdot x)]}$$

En esta expresión, *x* e *y* se miden en cm y *t* en segundos. Calcula el tiempo que tardará una onda en recorrer una distancia de 25 m.

Si comparamos la ecuación que proporciona el enunciado del ejercicio:

$$y\ (x,\ t) = 8 \cdot sen\ [\pi \cdot (100 \cdot t - 8 \cdot x)]$$

con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y(x,t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Identificando términos y realizando algunas sencillas operaciones, podemos determinar las magnitudes características de la onda:

$A = 8$ cm

$\omega = 100 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \dfrac{\omega}{2 \cdot \pi} = \dfrac{100 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 50 \text{ Hz}$; $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{50} = 0{,}02 \text{ s}$

$k = 8 \cdot \pi \ \text{ rad} \cdot \text{cm}^{-1}$; $k = \dfrac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \dfrac{2 \cdot \pi}{k} = \dfrac{2 \cdot \pi}{8 \cdot \pi} = 0{,}25 \text{ m}$

$v = \lambda \cdot f = 0{,}25 \cdot 50 = 12{,}5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 0{,}125 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Por tanto, el tiempo que tardará la onda en recorrer 25 m será:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{25}{0{,}125} = 200 \text{ s}$$

22. Se hace vibrar transversalmente un extremo de una cuerda de gran longitud con un período de 0,5 · π s y una amplitud de 0,2 cm, propagándose a través de ella una onda con una velocidad de 0,1 m · s^{-1}:

a) Escribe la ecuación de la onda.

b) Explica qué características de la onda cambian si:

– Se aumenta el período de vibración en el extremo de la cuerda.

– Se varía la tensión de la cuerda.

a) La ecuación general del movimiento ondulatorio que realiza una onda que se propaga en el sentido positivo del eje de abscisas es:

$$y(x,t) = A \cdot sen\ (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

A partir de los datos que proporciona el enunciado del ejercicio podemos obtener las magnitudes características de la onda:

$A = 0{,}2$ cm

$T = 0{,}5 \cdot \pi$ s ; $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0{,}5 \cdot \pi} = \dfrac{2}{\pi}$ Hz

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{2}{\pi} = 4$ rad $\cdot$ s^{-1}

$v = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{0{,}1}{2/\pi} = 0{,}05 \cdot \pi$ m

$k = \dfrac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \dfrac{2 \cdot \pi}{0{,}05 \cdot \pi} = 40$ rad $\cdot$ m^{-1}

Con todo ello, la ecuación que resulta es:

$$y(x,t) = 0{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ (4 \cdot t - 40 \cdot x) = 0{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot sen\ [4 \cdot (t - 10 \cdot x)]$$

b) Si aumentamos el período de vibración en el extremo de la cuerda:

– La frecuencia de vibración disminuirá, ya que esta es la inversa del período de vibración. La frecuencia angular disminuirá del mismo modo, al ser directamente proporcional a la frecuencia de vibración.

– Como no hay cambio de medio, la velocidad de propagación se mantendrá constante. Para que esto sea así, la longitud de onda debe aumentar en la misma proporción en que disminuye la frecuencia de vibración.

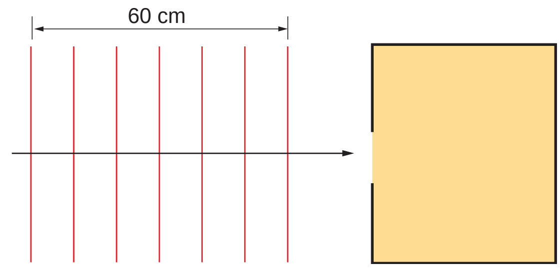
Para analizar que ocurre si se varía la tensión de la cuerda, recuerda que la velocidad de propagación de las ondas transversales producidas en una cuerda se corresponde con la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

En ella, T es la tensión de la cuerda, expresada en *N,* y μ, su densidad lineal, expresada en kg/m.

Por tanto, si T varía, v también lo hace.

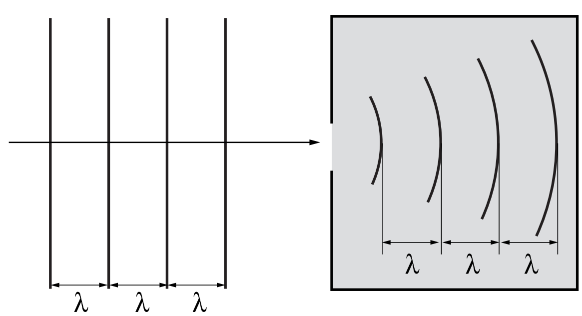
23. La figura muestra un frente de ondas plano, que llega a una habitación cuya puerta está abierta:



a) Copia la figura y dibuja sobre ella el frente de ondas que se forma al atravesar la puerta.

b) Calcula la longitud de onda, λ, de la perturbación tras atravesar la puerta.

a) En este caso se produce un fenómeno de difracción. La difracción se produce cuando un obstáculo impide el avance de parte de un frente de onda. Al llegar el frente de ondas al orificio, sus puntos se convierten, de acuerdo con el principio de Huygens, en centros emisores de nuevos frentes de ondas, obteniendo como resultado la envolvente de todos ellos.

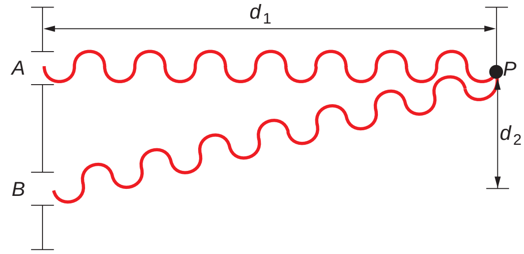


Ello explica que la forma del frente de ondas cambie al atravesar la onda la abertura.

b) La forma del frente de ondas cambia al atravesar la abertura. Sin embargo, la velocidad de propagación y la frecuencia no lo hacen. La longitud de onda antes y después de que se atraviese la abertura es la misma:

$$\lambda = \frac{60}{6} = 10 \text{ cm} = 0{,}1 \text{ m}$$

24. ¿Qué diferencia de caminos provocará una interferencia constructiva en el punto *P*? ¿Y una interferencia destructiva?



Indica el resultado en función de la longitud de onda, λ, del movimiento ondulatorio.

Para que se produzca interferencia constructiva, las distancias desde los puntos de origen (A y B) hasta el punto P han de cumplir la siguiente relación:

$$x_{BP} - x_{AP} = \lambda \cdot n$$

De acuerdo con las cotas que se indican en la figura, resulta:

$$x_{BP} - x_{AP} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} - d_1 = \lambda \cdot n$$

siendo $n = 1, 2, 3, ...$

Para que se produzca una interferencia destructiva, las distancias desde los puntos de origen (A y B) hasta el punto P considerado han de cumplir la siguiente relación:

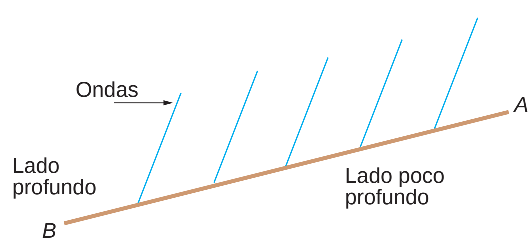
$$x_{BP} - x_{AP} = \frac{\lambda}{2} \cdot (2 \cdot n + 1)$$

En función de las cotas indicadas en el dibujo:

$$x_{BP} - x_{AP} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} - d_1 = \frac{\lambda}{2} \cdot (2 \cdot n + 1)$$

siendo $n = 0,1, 2, ...$

25. Un frente de ondas se propaga por la superficie de un estanque hasta que llega a un obstáculo. La frecuencia del movimiento ondulatorio es 100 Hz y la longitud de onda 10 cm.



a) Dibuja un diagrama como el que se adjunta y, sobre él, sitúa los sucesivos frentes de onda, para explicar qué ocurre en el lado poco profundo del estanque.

b) ¿Qué nombre recibe el fenómeno que se produce al encontrarse el movimiento ondulatorio con el obstáculo?

c) ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas en el lado más profundo del estanque?

a) En la parte en que el estanque es profundo se producirá la reflexión de las ondas al chocar contra la pared del estanque. Por el contrario, en la parte en que este es poco profundo, el fenómeno que se producirá será similar al que se produce en una playa con las olas del mar: la onda, al alcanzar el punto inferior en la vibración, rozará contra el fondo, dando lugar a la formación de olas.

b) Cuando el frente de ondas incide sobre el obstáculo, se produce una reflexión de las ondas.

c) En el enunciado se proporcionan los datos necesarios para calcular la velocidad de propagación en el lado profundo del estanque, donde no existen perturbaciones con el fondo:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 0{,}1 \cdot 100 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

PROBLEMAS

26 Una onda transversal se propaga por una cuerda según la ecuación:

$$\boldsymbol{y (x, t) = 0{,}4 \cdot sen\, [\pi \cdot (50 \cdot t - 0{,}5 \cdot x)]}$$

en la que todas las magnitudes se expresan en unidades del S.I. Calcula:

a) La frecuencia, el período, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.

b) La diferencia de fase, en un instante dado, entre dos puntos separados 2 m.

a) Si comparamos la ecuación de la onda:

$$y (x, t) = 0{,}4 \cdot sen\, [\pi \cdot (50 \cdot t - 0{,}5 \cdot x)]$$

con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y (x, t) = A \cdot sen\, (\omega \cdot t - k \cdot x)]$$

Identificando términos y realizando algunas sencillas operaciones obtenemos el valor de las magnitudes que solicita el enunciado del problema:

$$\omega = 50 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \;;\; \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{50 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 25 \text{ Hz} \;;\; T = \frac{1}{f} = \frac{1}{25} = 0{,}04 \text{ s}$$

$$k = 0{,}5 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \;;\; k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}5 \cdot \pi} = 4 \text{ m}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 4 \cdot 25 = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La diferencia de fase, en un instante dado, entre dos puntos separados 2 m es:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \cdot t - k \cdot x_2 - (\omega \cdot t - k \cdot x_1) = \omega \cdot t - k \cdot x_2 - \omega \cdot t + k \cdot x_1 =$$
$$= k \cdot (x_1 - x_2) = 0{,}5 \cdot \pi \cdot (0 - 2) = -\pi \text{ rad}$$

27. Se genera en una cuerda una onda transversal cuya velocidad de propagación es 2 m/s, su amplitud $8 \cdot 10^{-3}$ m y su longitud de onda 0,2 m. Determina:

a) La frecuencia y el número de onda.

b) La velocidad máxima que pueden tener los puntos de la cuerda.

a) La frecuencia de la onda la podemos obtener a partir de la expresión que relaciona la longitud de onda con la velocidad de propagación:

$$\lambda = v \cdot T \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

Sustituyendo valores, la frecuencia resulta:

$$f = \frac{2}{0{,}2} = 10 \text{ Hz}$$

El número de onda es:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow k = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}2} = 10 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) Para obtener la velocidad máxima de cualquier punto de la cuerda, escribimos, en primer lugar, la ecuación de la onda:

$$y\,(x, t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$y\,(x, t) = 8 \cdot 10^{-3} \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(10 \cdot t - \frac{x}{0{,}2}\right)\right] =$$

$$= 8 \cdot 10^{-3} \cdot sen(20 \cdot \pi \cdot t - 10 \cdot \pi \cdot x)$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo, obtenemos la velocidad:

$$v\,(x,\, t) = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot \pi \cdot cos\,(20 \cdot \pi \cdot t - 10 \cdot \pi \cdot x)$$

Para que la velocidad sea máxima, el coseno debe valer +1. Por tanto:

$$v_{máx} = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot \pi = 0{,}16 \cdot \pi \text{ m/s}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

28. Una onda armónica presenta las siguientes características: $A = 10$ cm ; $v_{propagación} = 10$ m/s ; $k = 20 \cdot \pi$ rad · m^{-1}.

Con estos datos, determina:

a) La ecuación de onda.

b) La diferencia de fase entre dos puntos separados 80 cm.

c) La diferencia de fase entre dos puntos separados 60 cm.

a) La ecuación general de una onda armónica podemos expresarla en la forma:

$$y\,(x, t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \theta\right)\right]$$

La longitud de onda se puede calcular a partir del número de onda:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{20 \cdot \pi} = 0{,}1 \text{ m}$$

Por su parte, el período resulta:

$$\lambda = v \cdot T \rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0{,}1}{10} = 0{,}01 \text{ s}$$

Como no se indica nada al respecto, supondremos que la fase inicial es nula. Así:

$$y\,(x,t) = 0,1 \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{0,01} - \frac{x}{0,1}\right)\right] =$$

$$= 0,1 \cdot sen\,[2 \cdot \pi \cdot (100 \cdot t - 10 \cdot x)]$$

b) Para dos puntos separados 80 cm, la diferencia de fase resulta:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{t}{0,01} - \frac{x}{0,1}\right) - \left(\frac{t}{0,01} - \frac{x'}{0,1}\right)\right]$$

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x'}{0,1} - \frac{x}{0,1}\right) = \frac{2 \cdot \pi}{0,1} \cdot 0,8 = 16 \cdot \pi \text{ rad}$$

Como $16 \cdot \pi$ es múltiplo de $2 \cdot \pi$, podemos afirmar que ambos puntos vibran en fase.

c) Si los dos puntos están separados 60 cm, al sustituir en la expresión anterior, resulta:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x'}{0,1} - \frac{x}{0,1}\right) = \frac{2 \cdot \pi}{0,1} \cdot \left(x' - x\right) = \frac{2 \cdot \pi}{0,1} \cdot 0,6 = 12 \cdot \pi \text{ rad}$$

Del mismo modo que antes, como $12 \cdot \pi$ es múltiplo de $2 \cdot \pi$, podemos afirmar que ambos puntos vibran en fase.

Estos resultados son perfectamente lógicos, ya que, en cualquier movimiento ondulatorio, los puntos que vibran en fase están separados un número entero de longitudes de onda, que en nuestro caso es 10 cm.

29. Una onda transversal se propaga por una cuerda según la ecuación:

$$\boldsymbol{y\,(x, t) = 0,4 \cdot cos\,(50 \cdot t - 2 \cdot x)}$$

En esta expresión, las magnitudes se miden en unidades S.I. Calcula:

a) La velocidad de propagación de la onda.

b) El estado de vibración de una partícula situada a 20 cm del foco en el instante $t = 0,5$ s.

a) La ecuación general de un movimiento ondulatorio puede escribirse de la forma:

$$y(x,t) = A \cdot cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Al comparar esta expresión con la del enunciado:

$$y(x,t) = 0,4 \cdot cos(50 \cdot t - 2 \cdot x)$$

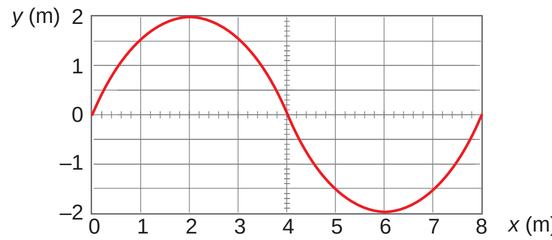
Como $\omega = k \cdot v$, identificando:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{50}{2} = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Sustituyendo en el punto indicado:

$$y(0,2\ ,\ 0,5) = 0,4 \cdot cos(50 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,2\ ) = 0,364 \text{ m}$$

30. **En la figura que sigue se representa una onda transversal que viaja en la dirección positiva del eje de abscisas:**



Sabiendo que la velocidad de propagación es $v = 4$ m/s, escribe la ecuación que representa el movimiento de la onda. Determina la velocidad de vibración del punto situado en $x = 4$ m, así como su valor máximo.

Para escribir la ecuación de la onda, necesitamos conocer su amplitud, A, su período, T, y su longitud de onda, λ. De la figura se deduce:

$$A = 2 \text{ m} \quad ; \quad \lambda = 8 \text{ m}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la velocidad de propagación de la onda, el período resulta:

$$\lambda = v \cdot T \rightarrow T = \frac{\lambda}{v} \rightarrow T = \frac{8}{4} = 2 \text{ s}$$

La ecuación general del movimiento armónico simple es:

$$y\,(x, t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

En este caso, sustituyendo valores, la ecuación de la onda es de la forma:

$$y\,(x, t) = 2 \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{8}\right)\right]$$

$$y\,(x, t) = 2 \cdot sen\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{4} \cdot x\right)$$

La velocidad de un punto situado a cuatro metros del origen la obtenemos derivando respecto al tiempo la ecuación de la posición y sustituyendo valores:

$$v\,(x, t) = 2 \cdot \pi \cdot cos\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{4} \cdot x\right)$$

Sustituyendo en esta expresión el valor $x = 4$ m, obtenemos la velocidad de ese punto:

$$v\,(4, t) = 2 \cdot \pi \cdot cos\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{4} \cdot 4\right) = 2 \cdot \pi \cdot cos\,(\pi \cdot t - 1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

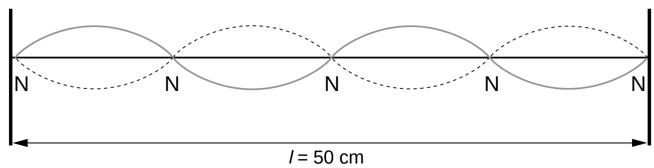
El valor máximo se obtiene cuando el coseno vale +1. En ese caso:

$$v_{máx}\,(x = 4 \text{ m}) = 2 \cdot \pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

31 **Se hace vibrar una cuerda de 0,5 metros, sujeta por los dos extremos. La cuerda tiene cinco nodos, siendo la amplitud de vibración 2 cm y la velocidad de propagación de las ondas 10 m/s. Calcula la frecuencia fundamental de vibración y la longitud de onda asociada.**

Al estar sujeta por los extremos, la cuerda tiene dos nodos en los extremos.



Como en total hay cinco nodos, podemos calcular la frecuencia de la vibración, ya que, para una onda estacionaria con nodos en los extremos:

$$f = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l}$$

En nuestro caso, $n = 4$, pues se empieza a contar desde $n = 0$. Debemos tener en cuenta que en el origen es donde se encuentra el primer nodo. De este modo:

$$f = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l} = \frac{4 \cdot 10}{2 \cdot 0{,}5} = 40 \text{ Hz}$$

Por tanto, la longitud de onda, que también se puede deducir del gráfico, resulta:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow \lambda = \frac{10}{40} = 0{,}25 \text{ m}$$

32. **Una onda transversal que se propaga por una cuerda coincidente con el eje *X*, tiene por expresión matemática (magnitudes en unidades S.I.):**

$$\boldsymbol{y\,(x,\, t) = 2 \cdot sen\,(7 \cdot t - 4 \cdot x)}$$

a) Determina la velocidad de propagación de la onda y la velocidad máxima de vibración de cualquier punto de la cuerda.

b) Calcula el tiempo que tarda la onda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda.

a) Si comparamos la onda del enunciado:

$$y\,(x,\, t) = 2 \cdot sen\,(7 \cdot t - 4 \cdot x)$$

con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y\,(x,\, t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

identificando términos y operando obtenemos:

$A = 2$ m

$$\omega = 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ ; } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{7}{2 \cdot \pi} = \frac{3{,}5}{\pi} \text{ Hz ; } T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{3{,}5} \text{ s}$$

$$k = 4 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} \; ; \; k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \; ; \; \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ m}$$

Con estos valores obtenemos la velocidad de propagación de la onda:

$$v = \lambda \cdot f = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3{,}5}{\pi} = \frac{7}{4} = 1{,}75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La velocidad de vibración de las partículas del medio la obtenemos derivando respecto al tiempo la ecuación de la onda:

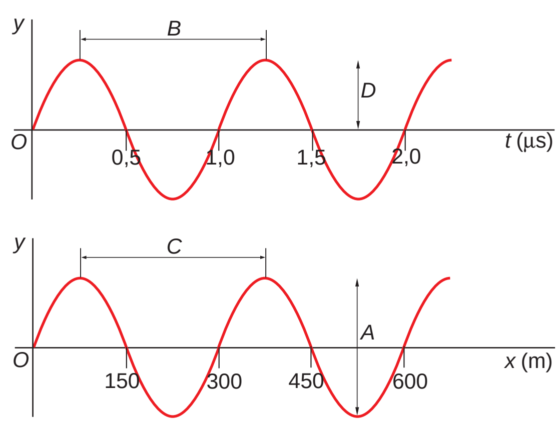
$$v\,(x,\, t) = \frac{dy\,(x,\, t)}{dt} = 14 \cdot cos\,(7 \cdot t - 4 \cdot x)$$

El valor máximo se obtendrá cuando $cos\,(7 \cdot t - 4 \cdot x) = 1$. En ese caso:

$$v_{máx} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Recuerda que no debes confundir la velocidad de propagación de la onda con la velocidad de vibración de las partículas del medio, que efectúan un movimiento vibratorio.

33. Las gráficas que siguen muestran el movimiento de una onda:



La primera representa el desplazamiento, *y*, frente al tiempo, *t*, en determinada posición, *x*. La segunda muestra el desplazamiento, *y*, frente a la posición, *x*, en un instante de tiempo, *t*.

a) Expresa las variables que se indican en función de los parámetros *A*, *B*, *C*, *D*: amplitud, longitud de onda, frecuencia y período.

b) Calcula la velocidad de propagación de la onda.

c) Escribe la ecuación de propagación de la onda, sabiendo que se trata de una onda transversal que se propaga en la dirección *OX*.

a) Para resolver este problema, es preciso entender con claridad el significado de ambas gráficas.

La primera muestra cómo cambia, a medida que transcurre el tiempo, el estado de vibración en que se encuentra una determinada partícula que ha sido alcanzada por la perturbación y que se encuentra en una posición relativa, *x*, que no cambia.

La segunda muestra el estado de vibración de distintos puntos alcanzados por la perturbación en un mismo instante. El efecto equivale a una fotografía instantánea de una zona alcanzada por la perturbación.

– Amplitud: Corresponde a la cota *D*. La amplitud es la máxima separación, desde su posición de equilibrio, de una partícula alcanzada por la vibración.

– Longitud de onda: Corresponde a la cota *C*. La distancia señalada es la que separa dos puntos que se encuentran en el mismo estado de vibración.

– Período: Corresponde a la cota *B*. Es el intervalo de tiempo que transcurre para que un punto alcance de nuevo el mismo estado de vibración.

– Frecuencia: Es la inversa del período: $f = 1/B$.

b) La velocidad de propagación de la onda se calcula a partir de la expresión:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{300}{10^{-6}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El resultado que obtenemos es, precisamente, la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas.

c) La ecuación general de una onda que se propaga en la dirección *OX* es:

$$y(x,t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \theta\right)\right]$$

Sustituyendo los datos que ya conocemos:

$$y(x,t) = D \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{10^{-6}} - \frac{x}{300}\right)\right]$$

El parámetro *D* no tiene un valor concreto, porque no se indican valores numéricos en la escala de elongaciones. En cuanto a la fase, θ, esta es nula, porque en el instante inicial ($t = 0$ s) la elongación en el foco ($x = 0$) es nula.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

34 Dada la ecuación de onda:

$$\boldsymbol{y(x, t) = 0{,}1 \cdot sen\,[2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot x + t)]}$$

Calcula:

a) Su amplitud, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

b) La distancia mínima que separa dos puntos que se encuentran en fase y otros dos que se encuentran en oposición de fase.

c) ¿Por qué hablamos de distancia mínima en el apartado anterior?

a) La ecuación general de una onda es:

$$y(x,t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Si comparamos la ecuación general con la del problema:

$$y(x,t) = 0{,}1 \cdot sen\,[2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot x + t)]$$

obtenemos directamente los siguientes valores:

$$\text{Amplitud, } A = 0{,}1 \text{ m}$$

$$\text{Frecuencia, } f = 1 \text{ Hz}$$

$$\text{Longitud de onda: } 1/\lambda = 2 \rightarrow \lambda = 0{,}5 \text{ m}$$

$$\text{Velocidad de propagación, } v = \lambda/f = 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La diferencia de fase entre dos puntos es:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot [(2 \cdot x + t) - (2 \cdot x' + t)]$$

Para dos puntos en fase, la diferencia de fase mínima es $2 \cdot \pi$, luego:

$$2 \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot [(2 \cdot x + t) - (2 \cdot x' + t)]$$

Por tanto, la distancia entre ambos puntos es:

$$x - x' = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ m}$$

c) Dos puntos consecutivos en oposición de fase son aquellos cuya diferencia de fase es π ($\Delta\varphi = (2 \cdot n + 1) \cdot \pi$):

$$\pi = 2 \cdot \pi \cdot [(2 \cdot x + t) - (2 \cdot x' + t)]$$

Simplificando la expresión anterior, resulta:

$$1 = 4 \cdot (x - x') \rightarrow x - x' = 0{,}25 \text{ m}$$

d) Existen multitud de puntos que vibran en fase y en oposición de fase. Entre dos puntos cualesquiera de una recta que parta del foco de la perturbación, separados una distancia igual a una longitud de onda, existen dos puntos que vibran en fase. Si la distancia que los separa es igual a media longitud de onda, existen dos puntos vibrando en oposición de fase.

35. Una onda tiene la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{y(x, t) = 0{,}25 \cdot sen\,(2 \cdot t - 5 \cdot x)}$$

En esta expresión, las magnitudes se miden en unidades S.I. Calcula:

a) Su longitud de onda, frecuencia y amplitud.

b) La velocidad de una partícula del medio situada a 2 m del foco cuando han transcurrido 4 s.

c) La diferencia de fase de un punto del medio cuando han transcurrido 10 s.

a) Si comparamos la ecuación del enunciado:

$$y\,(x, t) = 0{,}25 \cdot sen\,(2 \cdot t - 5 \cdot x)$$

con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y\,(x, t) = 0{,}25 \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

identificamos términos y realizamos algunas sencillas operaciones, obtenemos:

$A = 0{,}25$ m

$$\omega = 2 \text{ rad} \cdot s^{-1} \;;\; \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{2}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{\pi} \text{ Hz} \;;\; T = \frac{1}{f} = \pi \text{ s}$$

$$k = 5 \text{ rad} \cdot m^{-1} \;;\; k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{5} = 0{,}4 \cdot \pi \text{ m}$$

b) La velocidad de vibración de las partículas del medio la obtenemos derivando respecto al tiempo la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$v\,(x,\,t) = \frac{dy\,(x,\,t)}{dt} = 0{,}5 \cdot cos\,(2 \cdot t - 5 \cdot x)$$

La velocidad que corresponde a una partícula del medio que se encuentra a 2 m, transcurridos 4 s, es:

$$v\,(2,\,4) = 0{,}5 \cdot cos\,(2 \cdot 4 - 5 \cdot 2) = 0{,}5 \cdot cos\,(-2) = -0{,}21 \text{ m} \cdot s^{-1}$$

c) La diferencia de fase de un punto del medio, transcurridos 10 s, se calcula del siguiente modo:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2 \cdot t_2 - 5 \cdot x) - (2 \cdot t_1 - 5 \cdot x) = 2 \cdot (t_2 - t_1) = 2 \cdot 10 = 20 \text{ rad}$$

36. Se hace vibrar una cuerda de 0,5 metros, sujeta por los dos extremos. La cuerda tiene tres nodos y la amplitud de vibración es 1,2 cm, siendo la velocidad de propagación de las ondas 100 m/s. Escribe la ecuación de la onda estacionaria y calcula la frecuencia fundamental de vibración y la longitud de onda asociada.

Al estar sujeta por los extremos, la cuerda tiene dos nodos en los extremos. Como en total hay tres nodos, esto nos permite calcular la frecuencia de la vibración a partir de la longitud de la cuerda, ya que, para una onda estacionaria con nodos en los extremos:

$$f = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l} \rightarrow f = \frac{2 \cdot 100}{2 \cdot 0{,}5} = 200 \text{ Hz}$$

En nuestro caso, hemos tomado $n = 2$, pues se empieza a contar por $n = 1$, situación que corresponde al modo de vibración fundamental, con un nodo en cada extremo. El modo $n = 2$ corresponde a un nodo en cada extremo y otro nodo equidistante de ambos, que es el modo de vibración correspondiente a la onda del enunciado.

La longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow \lambda = \frac{100}{200} = 0{,}5 \text{ m}$$

La ecuación general de una onda armónica estacionaria se escribe en la forma:

$$y = 2 \cdot A \cdot cos\,(k \cdot x) \cdot sen\,(\omega \cdot t)$$

El número de onda, k, y la frecuencia angular, ω, son:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}5} = 4 \cdot \pi \text{ rad} \cdot m^{-1}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 200 = 400 \cdot \pi \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

Por tanto, la ecuación de la onda estacionaria resulta:

$$y = 0{,}024 \cdot cos\,(4 \cdot \pi \cdot x) \cdot sen\,(400 \cdot \pi \cdot t) \text{ m}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

37 **Una onda estacionaria tiene por ecuación:**

$$\boldsymbol{y = 5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot cos\,(40 \cdot \pi \cdot t)}$$

En esta expresión, *x* e *y* se miden en cm, y *t*, en segundos. Determina:

a) La amplitud y la velocidad de fase de las ondas componentes.

b) La distancia que existe entre dos nodos consecutivos.

c) La velocidad de una partícula situada en el punto $x = 1{,}5$ cm en cualquier instante.

a) La ecuación general que corresponde a una onda estacionaria es:

$$y = 2 \cdot A \cdot cos\,(k \cdot x) \cdot sen\,(\omega \cdot t)$$

Si la comparamos con la que ofrece el enunciado del problema:

$$y = 5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot cos\,(40 \cdot \pi \cdot t)$$

La amplitud con que oscila cada punto de la onda estacionaria depende de la posición; la frecuencia es la misma para todos, y coincide con la de las ondas que interfieren.

Dicha amplitud es:

$$A'(x) = 5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) = 2 \cdot A \cdot cos\,(k \cdot x)$$

Donde A es la amplitud de las ondas componentes. Por tanto:

$$5 = 2 \cdot A \rightarrow A = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ cm}$$

La longitud de onda la calculamos como sigue:

$$k = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \cdot \text{cm}^{-1};\ k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi/3} = 6 \text{ cm}$$

Y el período:

$$\omega = 40 \cdot \pi \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}\ ;\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{40 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 20 \text{ Hz}\ ;\ T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ s}$$

Por tanto, la velocidad de fase es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{6}{0{,}05} = 120 \text{ cm/s}$$

b) La condición que cumplen los nodos de la oscilación es:

$$x = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, la distancia que existe entre dos nodos consecutivos es:

$$x_2 - x_1 = (2 \cdot 2 + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} - (2 \cdot 1 + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} = (5 - 3) \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

c) La ecuación que corresponde a la velocidad de vibración de las partículas es:

$$v\,(x,\,t) = \frac{dy\,(x,\,t)}{dt} = 40 \cdot \pi \cdot 5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot sen\,(40 \cdot \pi \cdot t) =$$

$$= 200 \cdot \pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) \cdot sen\,(40 \cdot \pi \cdot t)$$

Por tanto, la velocidad de una partícula situada a 1,5 cm en cualquier instante será:

$$v\,(1{,}5,\,t) = 200 \cdot \pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1{,}5\right) \cdot sen\,(40 \cdot \pi \cdot t) =$$

$$= 200 \cdot \pi \cdot cos\,\frac{\pi}{2} \cdot cos\,(40 \cdot \pi \cdot t) = 0$$

De acuerdo con el resultado obtenido, ese punto es un nodo; por tanto, su elongación y su velocidad son siempre nulos.

38. Una fuente emisora de 4 W produce ondas esféricas en un medio no absorbente. Calcula la intensidad de la onda a 1 m de distancia del foco emisor.

La intensidad de una onda esférica se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Por tanto, a un metro de distancia del foco emisor, la intensidad de la onda será:

$$I = \frac{4}{4 \cdot \pi \cdot 1^2} = 0{,}32\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

39 Un frente de ondas plano posee una intensidad de 10^{-2} W · m^{-2} cuando incide en un medio absorbente de 0,1 m de espesor. Si a la salida la intensidad se ha reducido a una décima parte de la inicial, calcula:

a) El coeficiente de absorción del medio.

b) El espesor de semiabsorción.

a) La intensidad de una onda tras atravesar un medio material absorbente se calcula mediante la siguiente expresión:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

En el caso que nos ocupa, $I = I_0/10$, y $x = 0{,}1$ m. Por tanto:

$$\frac{I_0}{10} = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot 0{,}1} \rightarrow ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\beta \cdot 0{,}1 \rightarrow -ln\ 10 = -\beta \cdot 0{,}1$$

$$\beta = \frac{-ln\ 10}{-0{,}1} = 23\ \mathrm{m^{-1}}$$

b) El espesor de semiabsorción, $D_{1/2}$, es aquel que reduce a la mitad la intensidad inicial de la onda. Por tanto:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \cdot e^{-23 \cdot D_{1/2}} \rightarrow ln\left(\frac{1}{2}\right) = -23 \cdot D_{1/2} \rightarrow -ln\ 2 = -23 \cdot D_{1/2}$$

$$D_{1/2} = \frac{-ln\ 2}{-23} = 0{,}03\ \mathrm{m}$$

40. El coeficiente de absorción de un determinado medio es 0,5 cm^{-1}. Calcula cuál ha de ser su espesor para que la intensidad de una onda que lo atraviesa se reduzca a la quinta parte de la incidente.

La unidad S.I. en que se expresa el coeficiente de absorción es m^{-1}. Por tanto:

$$\beta = 0{,}5 \text{ cm}^{-1} = 50 \text{ m}^{-1}$$

La expresión que relaciona la intensidad de la onda incidente, I_0, y la que se obtiene, I, tras atravesar una distancia, x, de material absorbente es:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Teniendo en cuenta que:

$$I = \frac{I_0}{5} \quad ; \quad \beta = 50 \text{ m}^{-1}$$

Sustituyendo y operando, obtenemos:

$$\frac{I_0}{5} = I_0 \cdot e^{-50 \cdot x} \rightarrow ln\,\frac{1}{5} = -50 \cdot x$$

$$x = \frac{ln\,\dfrac{1}{5}}{-50} = 0{,}0322 \text{ m} = 3{,}22 \text{ cm}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

41. Una placa de vidrio tiene un espesor de 0,9 cm, siendo $n = 1{,}55$. Calcula cuánto tardará un haz de luz en pasar a través de ella.

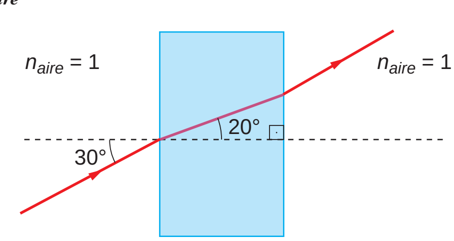
El índice de refracción de la placa de vidrio es la relación entre la velocidad de propagación del haz de luz en el aire y la velocidad de propagación a través de la placa de vidrio. Por tanto:

$$n = \frac{v_{aire}}{v_{vidrio}} \rightarrow v_{vidrio} = \frac{v_{aire}}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}55} = 1{,}93 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Como la placa de vidrio tiene un espesor de 0,9 centímetros, el haz de luz tardará en atravesarla:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_{vidrio}} = \frac{0{,}9 \cdot 10^{-2}}{1{,}93 \cdot 10^8} = 4{,}66 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

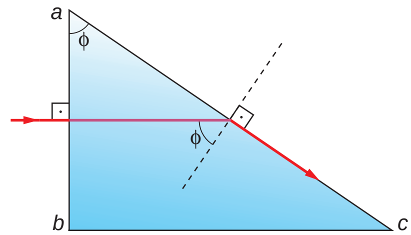
42. Calcula el índice de refracción del bloque de vidrio de la figura, si este se encuentra en el aire ($n_{aire} = 1$).



Aplicando directamente las leyes de Snell a la refracción, resulta:

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow n_2 = \frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} \cdot n_1 = \frac{sen\ 30°}{sen\ 20°} \cdot 1 = 1,462$$

43. Un rayo de luz incide, como se indica en la figura, sobre la cara *ab* de un prisma de cristal cuyo índice de refracción toma el valor *n* = 1,52.



Calcula:

a) El valor máximo del ángulo ϕ que hace que el rayo salga totalmente reflejado en la cara *ac*.

b) Ese mismo ángulo si el prisma está sumergido en agua (índice de refracción del agua = 4/3).

a) Como se aprecia en la ilustración, la línea que separa los dos medios es la recta *ac*, siendo la normal la recta perpendicular a ella, de trazo discontinuo.

Si el rayo sale reflejado en la cara *ac*, el ángulo que forma con la normal es 90°. Por tanto, al aplicar la ley de Snell, resulta:

$$\frac{sen\ \phi}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sen\ \phi = \frac{n_2}{n_1} \cdot sen\ 90° = \frac{1}{1,52} \rightarrow$$

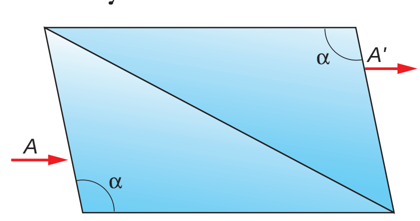
$$\rightarrow \phi = arcsen\left(\frac{1}{1,52}\right) = 41,14°$$

b) El índice de refracción del medio que rodea al prisma cambia. Por tanto:

$$\frac{sen\ \phi}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sen\ \phi = \frac{n_2}{n_1} \cdot sen\ 90° = \frac{1,33}{1,52} \rightarrow$$

$$\rightarrow \phi = arcsen\left(\frac{1,33}{1,52}\right) = 61,31°$$

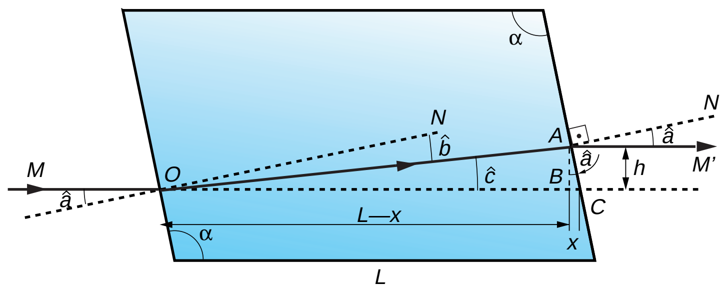
44 Un prisma, que se encuentra en el aire, está formado por dos prismas iguales, unidos como se indica en la figura. Los ángulos que se señalan miden 101,5°. Un rayo *A*, que incida como se indica, saldrá desplazado por *A'*. ¿Cuánto se desplazará verticalmente el rayo?



Datos: n_{prisma} = 1,6; L = 10 cm.

El ángulo que forma el rayo incidente con la normal es:

$$\hat{a} = 101{,}5 - 90 = 11{,}5°$$



Si aplicamos la ley de Snell a este sistema, podemos calcular el ángulo de refracción:

$$\frac{sen\ \hat{a}}{sen\ \hat{b}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sen\ \hat{b} = sen\ \hat{a} \cdot \frac{n_1}{n_2} = sen\ 11{,}5° \cdot \frac{1}{1{,}6} = 0{,}1246 \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{b} = arcsen\ 0{,}1246 = 7{,}16°$$

Por tanto, el ángulo marcado en la figura como $\hat{c}$, resulta:

$$\hat{c} = \hat{a} - \hat{b} = 11{,}5° - 7{,}16° = 4{,}34°$$

En cada uno de los dos triángulos rectángulos que se forman podemos escribir:

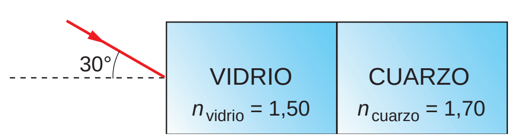
$$ABC \rightarrow \frac{x}{h} = tg\ \hat{a} \quad ; \quad OAB \rightarrow \frac{h}{L - x} = tg\ \hat{c}$$

De las dos expresiones anteriores podemos despejar el desplazamiento vertical del rayo, h:

$$h = L \cdot \frac{tg\ \hat{c}}{1 + tg\ \hat{c} \cdot tg\ \hat{a}} = 0{,}1 \cdot \frac{tg\ 4{,}34°}{1 + tg\ 4{,}34° \cdot tg\ 11{,}5°} =$$

$$= 7{,}47 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 7{,}47\ \text{mm}$$

45. **Completa el diagrama adjunto, indicando la trayectoria que seguirá un rayo de luz amarilla monocromática que pasa a través del vidrio y del cuarzo, para salir de nuevo al aire:**



Como conocemos el ángulo de incidencia del rayo y los índices de refracción del aire, del vidrio y del cuarzo, podemos determinar cuál será la desviación que sufre el rayo a medida que va atravesando cada medio. Para ello, simplemente hemos de aplicar la ley de Snell.

Al pasar del aire al vidrio, el ángulo de refracción es:

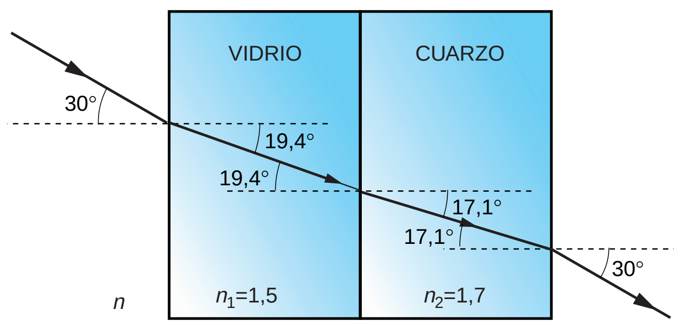
$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_1}{n} \rightarrow sen\ \hat{r} = \frac{n}{n_1} \cdot sen\ \hat{i} = \frac{1}{1,5} \cdot sen\ 30° = \frac{1}{3} \rightarrow \hat{r} = 19,47°$$

Si trazamos otra normal a la línea de separación vidrio-cuarzo, en el punto en que incide el rayo refractado, el ángulo de incidencia con que llega el rayo al cuarzo es el que hemos calculado anteriormente. Por tanto:

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow sen\ \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot sen\ \hat{i} = \frac{1,5}{1,7} \cdot sen\ 19,47° = 0,294 \rightarrow \hat{r} = 17,1°$$

Por último, al salir al aire:

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}} = \frac{n}{n_2} \rightarrow sen\ \hat{r} = \frac{n_2}{n} \cdot sen\ \hat{i} = \frac{1,7}{1} \cdot sen\ 17,1° = 0,5 \rightarrow \hat{r} = 30°$$



Como vemos, el rayo sale paralelo a la dirección de entrada.